ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 13

А. И. МАРКУШЕВИЧ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книжка знакомит читателя с комплексными числами и простейшими функциями от них (включая функцию Н. Е. Жуковского с применением к построению профиля крыла самолёта). Изложению придана геометрическая форма. Комплексные числа рассматриваются как направленные отрезки, а функции — как отображения. Чтобы привести читателя к такому пониманию комплексных чисел, мы начинаем с геометрического истолкования действительных чисел и действий над ними. В основу книжки положена лекция, читанная автором для школьников 9-го и 10-го классов. Предварительного знакомства с комплексными числами от читателя не требуется.

Автор

А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.

Редактор *А. Т. Цветков.*

Техн. редактор *Р. А. Негримовская.* Корректор О. *А. Сигал.*

Сдано в набор 6/IV 1954 г. Подписано к печати 14/V 1954 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 1,62. Условн. печ. л. 2,67. Уч.-изд. л. 2,72. Тираж 25000 экз. Т-03145. Цена книги 80 коп. Заказ № 1331.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, 15.

4-я типография им. Евг. Соколовой Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

1. Для геометрического изображения действительных чисел применяется *числовая ось*, т. е. прямая, на которой заданы точка A — *начало* координат, изображающая число 0, и другая точка B, изображающая число $+1$ (черт. 1).

Черт. 1.

Направление от A к B рассматривается как положительное направление числовой оси, отрезок AB — как единица длины. Любой отрезок AC изображает действительное число x, абсолютная величина которого равна длине отрезка. Если C не совпадает с A (т. е. если это число x не равно нулю), то x положительно, когда направление от A к C совпадает с положительным направлением оси, и отрицательно, когда это направление противоположно положительному направлению оси.

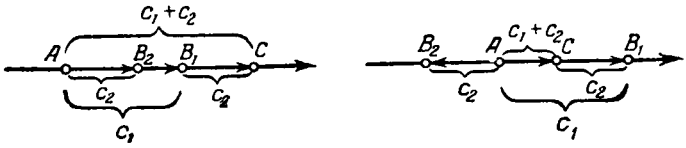
2. Будем рассматривать любые отрезки числовой оси как направленные отрезки — *векторы на прямой*. У каждого вектора различаем начало и конец, принимая направление от начала к концу за направление вектора. Записывать векторы будем двумя буквами: на первом месте — начало, на втором — конец. Каждый вектор, где бы ни помещалось его начало (не обязательно в A), будет изображать некоторое действительное число, абсолютная величина которого равна длине вектора. Число это положительно, когда направление вектора одинаково с положительным направлением оси, и отрицательно, когда это направление противоположно положительному. Так, например, вектор AB (начало A, конец B) изображает число $+1$, а вектор BA (начало B, конец A) число -1.

3. Направление вектора можно определить, указав угол между этим вектором и положительным направлением оси. Если направление вектора одинаково с положительным

направлением оси, то этот угол можно считать равным 0°. Если оно противоположно положительному направлению оси, то этот угол можно считать равным 180° (или —180°). Пусть x — какое-нибудь действительное число; если $x \neq 0$, то угол между вектором, изображающим это число, и положительным направлением числовой оси называется *аргументом* числа x. Очевидно, что аргумент положительного числа равен 0°, а аргумент отрицательного — равен 180° (или —180°). Аргумент числа x обозначается так: Arg x (Arg — первые три буквы латинского слова argumentum, которое можно перевести здесь как знак, признак). Число 0 изображается не вектором, а точкой. Хотя в дальнейшем мы будем рассматривать точку как частный случай вектора — вектор нулевой длины, но мы не сможем говорить в этом случае ни о направлении, ни об угле с числовой осью; поэтому числу 0 не будем приписывать никакого аргумента.

4. Обратимся к геометрическому истолкованию действий над действительными числами. Здесь нужно остановиться на истолковании сложения и умножения, от которых легко перейти к истолкованию обратных действий — вычитания и деления. Пусть c_1 и c_2 — два действительных числа, AB_1 и AB_2 — изображающие их векторы. Будем искать правила, по которым, зная векторы AB_1 и AB_2, можно построить вектор, изображающий сумму $c_1 + c_2$ или произведение $c_1 c_2$. Начнём со сложения. Итак, что нужно сделать с вектором AB_1, изображающим первое слагаемое, чтобы получить вектор AC, изображающий сумму?

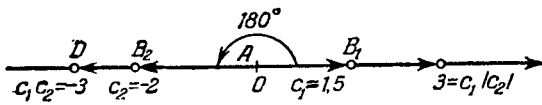
Легко проверить, что во всех случаях для этого достаточно от конца вектора AB_1 отложить вектор B_1C, одинаковый по длине и по направлению с вектором AB_2; вектор AC и будет искомым (черт. 2).



Черт. 2.

5. Перейдём к умножению. Если один из сомножителей равен нулю, то и произведение равно нулю; в этом случае вектор, изображающий произведение, сводится просто к точке. Пусть ни один из сомножителей не равен нулю. Тогда абсо-

лютная величина *) произведения c_1c_2 будет равна $|c_1| \cdot |c_2|$, т. е. произведению абсолютных величин c_1 и c_2. Поэтому длина вектора AD, изображающего произведение, будет равна произведению длин векторов AB_1 и AB_2, изображающих сомножители. Знак произведения c_1c_2 будет совпадать со знаком c_1, когда $c_2 > 0$, и будет противоположен ему, когда $c_2 < 0$. Иными словами, направление AD совпадает с направлением AB_1, когда $\operatorname{Arg} c_2 = 0$ (это и значит, что $c_2 > 0$), и противоположно направлению AB_1, когда $\operatorname{Arg} c_2 = 180°$ (это и значит, что $c_2 < 0$). Теперь нам нетрудно ответить на вопрос: что нужно сделать с вектором AB, изображающим множимое c_1, чтобы получить из него вектор AD, изображающий произведение c_1c_2 ($c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$)? Для этого нужно умножить длину AB_1 на $|c_2|$ (не меняя направления вектора AB_1), а затем повернуть изменённый вектор на угол, равный аргументу c_2 (т. е. на 0°, если $c_2 > 0$, или на 180°, если $c_2 < 0$); полученный вектор и будет изо-



Черт. 3.

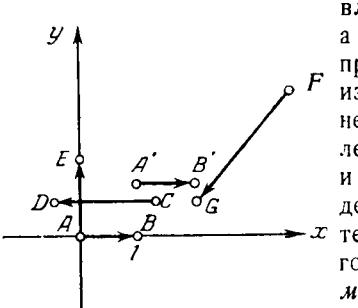
бражать произведение. На черт. 3 это правило пояснено на примере ($c_1 = 1{,}5$ и $c_2 = -2$).

6. С каждым вектором на прямой мы связали число, которое изображается этим вектором. Будем рассматривать теперь всевозможные векторы на плоскости и с каждым из них также свяжем число, изображаемое этим вектором. Числа, к которым мы придём таким путём — *комплексные числа*, — будут числами иного, более общего характера, чем действительные числа. Последние окажутся лишь частным случаем комплексных чисел, подобно тому как целые числа являются частным случаем рациональных чисел, а рациональные — частным случаем действительных чисел.

Начнём с того, что в плоскости, векторы которой мы будем рассматривать, проведём две взаимно перпендикулярные прямые — две числовые оси Ax и Ay с общим началом координат A, и пусть отрезок AB изображает единицу

*) Абсолютная величина некоторого числа c обозначается так: $|c|$. Например, $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

длины (черт. 4). Тогда любой вектор, лежащий на оси Ax или параллельный ей, можно попрежнему рассматривать как геометрический образ (изображение) действительного числа. Так, векторы AB и $A'B'$, длина каждого из которых равна единице, а направления совпадают с положительным направлением Ax, изображают число 1, а вектор CD длины 2 и прямо противоположного направления изображает число -2. Векторы, не лежащие на Ax и не параллельные этой оси, такие, как AE и FG, не изображают никаких действительных чисел. Относительно этих векторов мы будем говорить, что они *изображают мнимые числа*. При этом векторы, равные по длине, параллельные между собой и направленные в одну и ту же сторону, изображают одно и то же число, а векторы, различающиеся либо длиной, либо направлением, — разные мнимые числа. Здесь мы забегаем несколько вперёд, так как, не зная, что такое мнимые числа, уже говорим об их образах; однако нередко и в жизни знакомство с портретом предшествует знакомству с оригиналом.



Черт. 4.

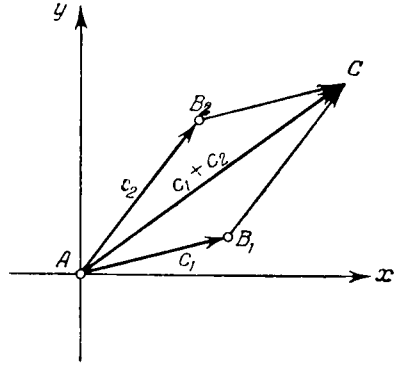
Выше мы показали, что действия над действительными числами можно заменить операциями над векторами, изображающими эти числа. Подобно этому мы и действия над мнимыми числами будем заменять действиями над изображающими их векторами. Правила действий мы не будем придумывать заново, а сохраним в геометрической форме правила, найденные для сложения и умножения действительных чисел. Разница будет лишь в том, что последние изображались векторами на прямой Ax (или векторами, параллельными этой прямой), тогда как мнимые числа изображаются векторами на плоскости, не лежащими на Ax и не параллельными Ax.

7. Прежде чем двинуться дальше, подчеркнём, что *комплексными числами* (слово «комплексный» означает составной) называются и действительные числа (уже известные нам) и мнимые (которые мы знаем пока только по «портретам»).

Для сравнения напомним, что для рациональных и иррациональных чисел, рассматриваемых вместе, также употреб-

ляется общее название: действительные (или вещественные) числа.

Займёмся сложением комплексных чисел. Мы условились оставить в силе правило, формулированное для сложения действительных чисел. Пусть AB_1 и AB_2 — два вектора, изображающие некоторые комплексные числа c_1 и c_2; чтобы построить вектор, изображающий их сумму $c_1 + c_2$, от конца вектора AB_1 откладываем вектор B_1C, одинаковый по длине и по направлению с вектором AB_2; вектор AC, соединяющий начало AB_1 с концом B_1C, и будет искомым (черт. 5).



Черт. 5.

Новое здесь заключается в том, что мы теперь применяем это правило к сложению комплексных чисел (изображаемых любыми векторами на плоскости), а ранее применяли только к действительным числам (изображаемым векторами на прямой).

Если применить то же правило для построения суммы $c_2 + c_1$ (слагаемые поменялись местами), то нужно будет от конца вектора AB_2, изображающего c_2, отложить вектор, одинаковый по длине и по направлению с вектором AB_1 (изображающим c_1). Очевидно, что мы придём в ту же самую точку C (на черт. 5 получается параллелограмм), и следовательно, сумма $c_2 + c_1$ изображается тем же вектором AC, что и сумма $c_1 + c_2$. Иными словами, из правила сложения вытекает справедливость переместительного закона:

$$c_2 + c_1 = c_1 + c_2.$$

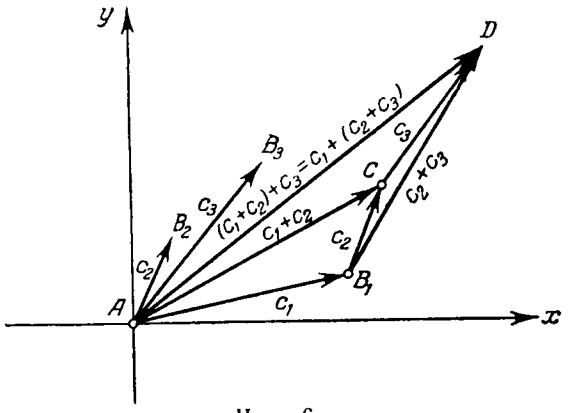
Легко доказать, что справедлив и сочетательный закон:

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3).$$

Все необходимые построения проведены на черт. 6. Очевидно, что, складывая $(c_1 + c_2)$ (AC) с c_3 (CD), мы получим тот же вектор AD, как и складывая c_1 (AB_1) с $(c_2 + c_3)$ (B_1D).

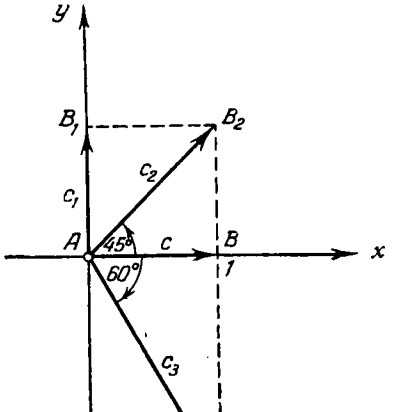
8. Прежде чем перейти к умножению, перенесём на комплексные числа понятия абсолютной величины и аргумента.

Пусть вектор AB изображает комплексное число c. Абсолютной величиной c называется длина вектора AB, а



Черт. 6.

аргументом c — угол между положительным направлением оси Ax и вектором AB. Этот угол можно отсчитывать против направления движения часовой стрелки, тогда он имеет положительное значение, или по часовой стрелке, тогда он имеет отрицательное значение; кроме того, к нему можно по произволу добавлять любое целое, кратное 360°.



Черт. 7.

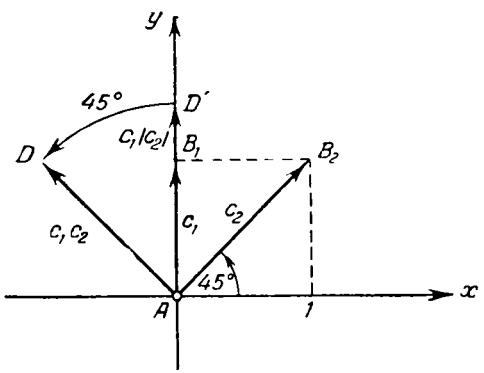
Абсолютная величина и аргумент числа c обозначаются так же, как для действительных чисел: $|c|$ и Arg c. Новое по сравнению со случаем действительных чисел в том, что аргумент мнимого числа отличен от 0° и от $\pm 180°$, тогда как для действительных чисел (не равных нулю) аргументом может быть либо 0° (если число положительное), либо $\pm 180°$ (если оно отрицательно).

На черт. 7 представлены векторы AB, AB_1, AB_2 и AB_3, изображающие комплексные числа: c, c_1, c_2 и c_3. Читатель легко проверит справедливость следующих утверждений:

$$|c| = |c_1| = 1, \quad |c_2| = \sqrt{2}, \quad |c_3| = 2;$$

$$\operatorname{Arg} c = 0°, \operatorname{Arg} c_1 = 90°, \operatorname{Arg} c_2 = 45°, \operatorname{Arg} c_3 = -60° \text{ (или } 300°).$$

9. После того как введены понятия абсолютной величины и аргумента комплексного числа, можно высказать и правило умножения комплексных чисел. Оно буквально совпадает с соответствующим правилом умножения для действительных чисел: чтобы умножить комплексное число c_1 на комплексное число c_2 ($c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$), нужно умножить на $|c_2|$ длину вектора, изображающего c_1 (не меняя направления этого вектора), а затем повернуть изменённый вектор около точки A на угол, равный аргументу c_2; полученный вектор изобразит произведение c_1c_2. Например, произведение c_1c_2 изображается



Черт. 8.

вектором AD (черт. 8), а произведение c_2c_3 — вектором AE (черт. 9).

К правилу умножения нужно добавить ещё, что в случае, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, произведение также равно нулю.

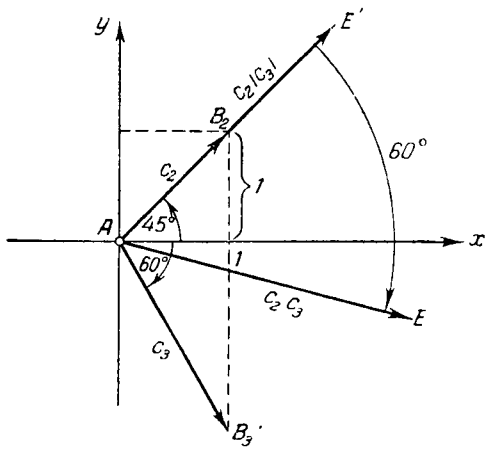
Если применить правило умножения к произведению c_2c_1 (порядок сомножителей изменён), то нужно будет длину вектора, изображающего c_2, изменить в $|c_1|$ раз и изменённый вектор повернуть около точки A на угол, равный аргументу c_1. Очевидно, что результат получается тот же самый,

как и при умножении c_1c_2: в обоих случаях длина полученного вектора есть $|c_1||c_2|$, а угол между Ax и этим вектором равен $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2$.

Итак,

$$c_1c_2 = c_2c_1,$$

т. е. переместительный закон справедлив для умножения комплексных чисел.



Черт. 9.

Точно так же справедлив и сочетательный закон:

$$(c_1c_2)\,c_3 = c_1(c_2c_3).$$

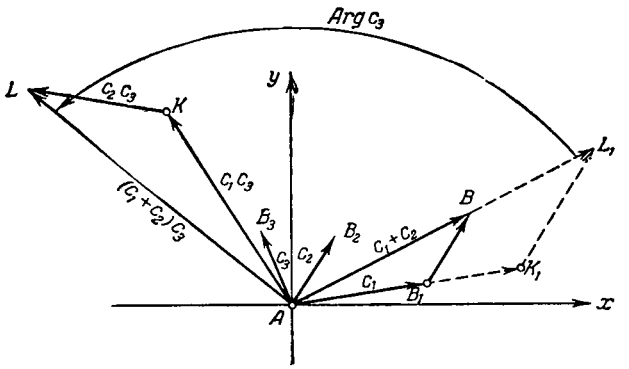
В самом деле, каждое из рассматриваемых произведений изображается одним и тем же вектором; длина его есть $|c_1| \cdot |c_2| \cdot |c_3|$, а угол между осью Ax и этим вектором равен $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2 + \operatorname{Arg} c_3$.

Докажем, наконец, справедливость распределительного закона:

$$(c_1 + c_2)\,c_3 = c_1c_3 + c_2c_3.$$

На черт. 10 вектор AB изображает сумму $c_1 + c_2$; если, сохраняя направление AB_1 и AB_2, умножить все длины сторон треугольника AB_1B на $|c_3|$, то получится треугольник AK_1L_1, подобный треугольнику AB_1B. Он образован векторами AK_1, K_1L_1, AL_1, получающимися из векторов c_1, c_2 и $(c_1 + c_2)$ посредством изменения всех длин в $|c_3|$ раз (без

изменения направлений). Повернём теперь треугольник AK_1L_1 около точки A на угол $\operatorname{Arg} c_3$; получится треугольник AKL. По правилу умножения вектор AK изображает в нём c_1c_3,



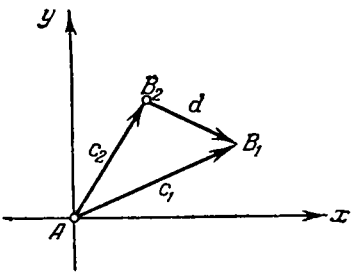
Черт. 10.

KL — c_2c_3 и AL — $(c_1+c_2)c_3$. По правилу сложения находим из этого же треугольника:

$$c_1c_3+c_2c_3=(c_1+c_2)\,c_3,$$

что и требовалось доказать.

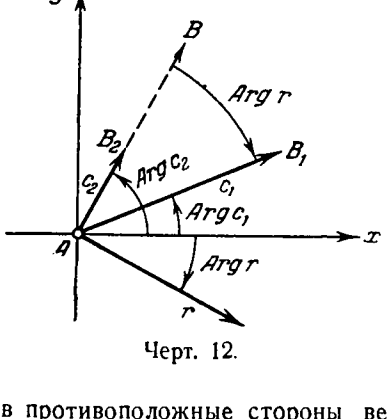
10. Действия вычитания и деления определяются как обратные по отношению к сложению и умножению. Именно, мы называем комплексное число d разностью чисел c_1 и c_2 и пишем $d=c_1-c_2$, если $c_1=c_2+d$, т. е. если c_1 есть сумма c_2 и d. Изображая это соотношение между c_2, d и c_1 на чертеже (черт. 11), видим, что вектор, изображающий разность c_1-c_2, получается, если точку B_2 (конец вектора, изображающего вычитаемое) соединить с точкой B_1 (конец вектора, изображающего уменьшаемое) и первую точку принять за начало вектора, а вторую — за конец этого вектора.



Черт. 11.

Аналогично комплексное число r называем частным чисел c_1 и c_2 ($c_2\neq 0$) и пишем $r=c_1:c_2$ или $r=\frac{c_1}{c_2}$, если $c_1=c_2r$, т. е. если c_1 есть произведение c_2 на r (черт. 12).

Отсюда вытекает, что $|r|$ — длина вектора, изображающего r, — есть $\frac{|c_1|}{|c_2|}$, а $\operatorname{Arg} r$ равен углу B_2AB_1, отсчитываемому в направлении от AB_2 к AB_1 (на черт. 12 — это направление поворота по часовой стрелке, следовательно, угол должен рассматриваться как отрицательный).



Черт. 12.

Отметим частные случаи. Если c_1 и c_2 изображаются параллельными и направленными в одну и ту же сторону векторами, то угол B_2AB_1 равен 0°, следовательно, $\operatorname{Arg} r = 0°$, т. е. r — действительное положительное число. Если же c_1 и c_2 изображаются параллельными, но направленными в противоположные стороны векторами, то угол B_2AB_1 равен 180° и число r является действительным отрицательным.

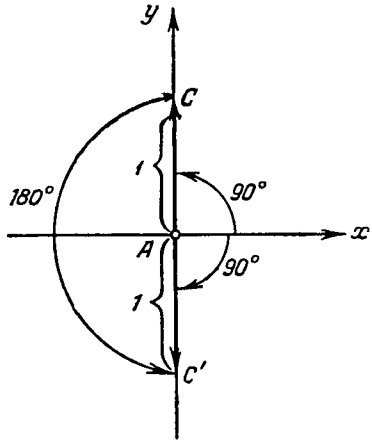
Подводя итоги, можно сказать, что сложение и умножение комплексных чисел удовлетворяют тем же законам, переместительному, сочетательному и распределительному, как и в случае действительных чисел, а вычитание и деление, так же как и для действительных чисел, определяются как действия, обратные сложению и умножению. Поэтому все правила действий и формулы, выводимые в алгебре для действительных чисел, на основании определения действий и упомянутых законов должны остаться в силе и для комплексных чисел. Например,

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c_1^2 - c_2^2, \quad (c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} = \frac{c_1c_4 + c_2c_3}{c_2c_4} \quad (c_2 \neq 0 \text{ и } c_4 \neq 0) \text{ и т. п.}$$

11. Читатель, изучая математику, неоднократно встречался с расширением (или обобщением) понятия числа. Это было и в арифметике при введении дробей, и в алгебре при введении отрицательных чисел, а позднее — чисел иррациональных. Каждое новое расширение понятия числа открывало возможности решения таких задач, которые до этого представлялись неразрешимыми или даже бессмысленными. Так, введение дробей позволило выполнять деление двух чисел

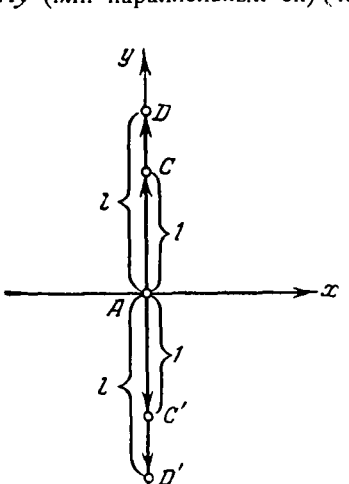
во всех случаях, когда делитель отличен от нуля, например делить 4 на 3 или 2 на 5; введение отрицательных чисел позволило производить во всех случаях вычитание, например вычитать 5 из 2; введение иррациональных чисел позволило выразить числом длину любого отрезка, несоизмеримого с единицей, например длину диагонали квадрата, сторона которого равна единице. Однако, ограничиваясь одними только действительными числами, мы не могли извлекать квадратный корень из отрицательного числа. Убедимся в том, что введение комплексных чисел делает эту задачу разрешимой. Естественно, что квадратным корнем из комплексного числа c (обозначим корень знаком $\sqrt{c}$) мы назовём комплексное число a, квадрат которого (т. е. произведение a самого на себя) равен c. Иными словами, $a = \sqrt{c}$ означает, что $aa = c$. Пусть c — отрицательное число, например $c = -1$; желая найти $\sqrt{-1}$, мы должны решить уравнение $a^2 = -1$. Умножить a на a — это значит, во-первых, умножить длину вектора, изображающего a, на $|a|$, т. е. на эту же длину, не меняя направления a, и затем повернуть полученный вектор около точки A на угол, равный $\operatorname{Arg} a$. Очевидно, что длина найденного вектора будет равна тогда $|a|^2$. Но найденный вектор должен изображать число -1; поэтому его длина равна единице. Итак, $|a|^2 = 1$ и, следовательно, $|a| = 1$ (длина вектора всегда неотрицательна). Далее, угол между вектором, изображающим a^2, и осью Ax равен $\operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} a = 2 \operatorname{Arg} a$; с другой стороны, $a^2 = -1$, так что этот угол должен равняться $+180°$ или $-180°$. Поэтому $2 \operatorname{Arg} a = \pm 180°$, откуда либо $\operatorname{Arg} a = 90°$, либо $\operatorname{Arg} a = -90°$. Мы получили, следовательно, два различных вектора AC и AC', изображающих два различных значения $\sqrt{-1}$ (черт. 13). Мнимое число, изображаемое вектором AC, обозначается буквой i и называется ***мнимой единицей***; имеем: $|i| = 1$, $\operatorname{Arg} i = 90°$.



Черт. 13.

Легко понять, что мнимое число, изображаемое вектором AC', можно получить из i путём умножения i на -1. В самом деле, по правилу умножения для этого надо помножить длину AC на $|-1| = 1$ (от этого вектор AC не изменится) и затем повернуть около A на угол $\mathrm{Arg}\,(-1) = 180°$; получится вектор AC'. Соответствующее этому вектору мнимое число есть, следовательно, $i(-1)$ или $-1 \cdot i$, короче $-i$. Итак, $\sqrt{-1} = \pm i$.

12. Рассмотрим какой-либо вектор AD, лежащий на оси Ay (или параллельный ей) (черт. 14). Пусть длина его равна l.



Черт. 14.

Если направление этого вектора совпадает с положительным направлением оси Ay (вверх от Ax), то мнимое число c, которое он изображает, можно получить из i путём умножения на положительное число l, следовательно, $c = l \cdot i$, или короче $c = li$.

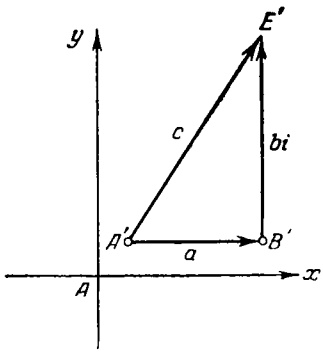
Если направление AD противоположно положительному направлению Ay, то число c получится из i путём умножения на отрицательное число $-l$ (или из $-i$ путём умножения на l); следовательно, в этом случае $c = (-l) \cdot i$ или короче $c = -li$.

Итак, любой вектор (ненулевой длины), лежащий на оси Ay (или параллельный ей), изображает мнимое число вида $\pm li$, где берётся знак $+$ или $-$ в зависимости от того, совпадает ли направление вектора с положительным направлением Ay или противоположно ему. Вследствие этого ось Ay называется *мнимой осью*. Ось Ax, все векторы которой изображают действительные числа, называется *действительной осью*.

Рассмотрим какой-либо вектор $A'E'$, не лежащий ни на той, ни на другой оси и непараллельный осям. Посредством построения, указанного на черт. 15, можно представить число c, изображаемое этим вектором, в виде суммы двух других чисел: одного, изображаемого вектором $A'B'$, параллельным Ax (или лежащим на Ax), и другого, изображаемого вектором

$B'E'$, параллельным Ay. Но $A'B'$ изображает некоторое действительное число a, а $B'E'$ — мнимое число вида bi, поэтому $c = a + bi$.

Итак, мы представили мнимое число c через действительные числа a и b и мнимую единицу i. Так как вектор $A'E'$ не параллелен ни одной из осей, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Легко понять, что числа, изображаемые векторами, параллельными той или другой оси, можно записать в аналогичном виде; а именно, если вектор параллелен действительной оси, то он изображает число вида $a + 0 \cdot i$, а если — мнимой, — то число вида $0 + bi$.



Черт. 15.

Итак, каждое комплексное число c может быть представлено в виде $c = a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица.

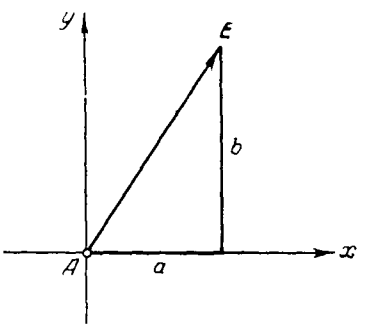
13. Подведём итог. Мы начали с изображения действительных чисел векторами, лежащими на одной и той же прямой, придали геометрическую форму правилам действий над ними, сведя эти действия к операциям над векторами, а затем стали рассматривать всевозможные векторы на плоскости как изображающие числа более общего вида — комплексные, которые лишь в частном случае (когда векторы лежат на оси Ax или параллельны ей) сводятся к действительным. Распространяя на векторы на плоскости операции, применявшиеся к векторам на прямой, мы ввели действия сложения и умножения (а затем и обратные действия — вычитание и деление) и убедились в том, что они подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами. При этом о самих комплексных числах мы не знаем ничего иного, кроме того, что все они изображаются векторами и притом так, что любые два вектора, равные по длине, параллельные между собой и направленные в одну и ту же сторону, изображают одно и то же комплексное число, а векторы, отличающиеся либо длиной, либо направлением, изображают разные числа. Мы убедились, что комплексные числа позволяют извлечь квадратный корень из -1, и ввели мнимую единицу i как одно из двух значений $\sqrt{-1}$ (то значение корня, аргумент которого есть $+90°$). Наконец, опираясь на правила

действий над комплексными числами, мы показали, что каждое комплексное число c может быть представлено в виде $c = a + bi$, где a и b — действительные числа.

Итак, *c состоит* из двух слагаемых a и bi; одно — a — изображается вектором действительной оси и может рассматриваться как произведение действительного числа a на действительную единицу; другое — bi — изображается вектором мнимой оси и может рассматриваться как произведение действительного числа b на мнимую единицу i. Такое строение любого комплексного числа позволяет понять, почему все эти числа были названы комплексными (т. е. составными).

Заметим, что a называется действительной, а b мнимой частью числа c. Например, для числа $c = 3 - 2i$ действительная часть равна 3, а мнимая часть равна -2.

14. Если изображать комплексные числа c векторами с началом в одной и той же точке A, то не равным между собой комплексным числам будут соответствовать не совпадающие друг с другом векторы и обратно: несовпадающим векторам будут соответствовать различные комплексные числа. Пусть $c = a + bi$; тогда конец вектора AE, изображающего число c, будет иметь абсциссу a и ординату b (черт. 16).

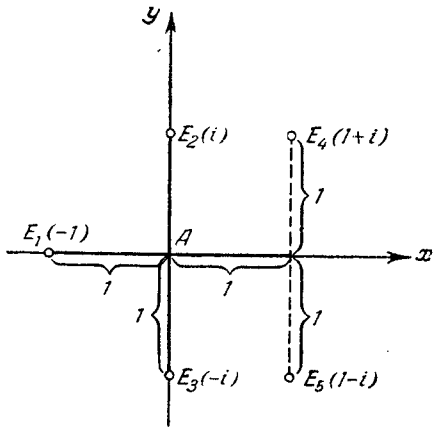


Черт. 16.

Итак, если начало вектора, изображающего число $c = a + bi$, поместить в начале координат A, то числа a и b будут координатами конца этого вектора. Пользуясь этим замечанием, можно изображать комплексные числа геометрически не только векторами, но и точками. Именно, каждое комплексное число $a + bi$ можно изображать одной только точкой E с координатами a и b и обратно: каждую точку E' с координатами a' и b' можно рассматривать как изображающую комплексное число $a' + ib'$. На черт. 17 указаны точки E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, изображающие (по порядку) следующие числа: -1, i, $-i$, $1 + i$, $1 - i$.

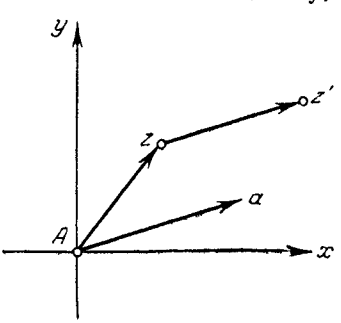
В дальнейшем для краткости мы часто будем называть одними и теми же словами «точка z» и само комплексное число z и изображающую его точку E. Например, выражение «точка $1 + i$» будет обозначать и само число $1 + i$ и

изображающую его точку E_4 (черт. 17). По тексту будет видно, какой из двух смыслов этого выражения имеется в виду. Впрочем, лучше привыкнуть не задумываться над этим вопросом и употреблять оба смысла как равнозначные.

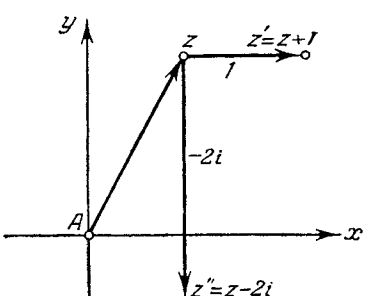


Черт. 17.

15. Пусть z — некоторая точка. Если z сложить с каким-либо числом a, то получится новая точка $z' = z + a$. Очевидно, что перейти от точки z к точке z' можно путём *сдвига* (или *переноса*) *на вектор* a, т. е. посредством перемещения точки z по направлению вектора a на расстояние, равное длине этого вектора (черт. 18). Подбирая соответствующее a, можно получить любой сдвиг точки z. Например, если точку z нужно сдвинуть в положительном направлении оси Ax на единицу, берём $a = 1$; точка $z' = z + 1$



Черт. 18.

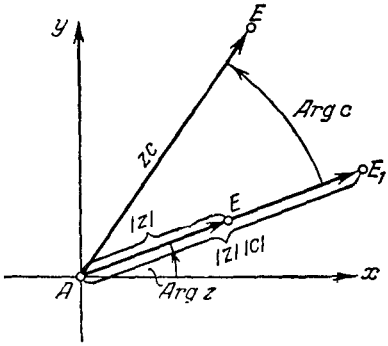


Черт. 19.

и будет искомой. Если же z нужно сдвинуть в отрицательном направлении оси Ay на две единицы, берём $a = -2i$; точка $z'' = z + (-2i) = z - 2i$ будет искомой (черт. 19).

Итак, действие сложения $z' = z + a$ геометрически означает сдвиг точки z на вектор a.

16. Рассмотрим действие умножения z на некоторое число $c \neq 0$. Чтобы умножить z на c, нужно умножить длину вектора AE (т. е. число $|z|$) на число $|c|$ и полученный вектор AE_1 повернуть на угол, равный $\operatorname{Arg} c$ (черт. 20). Первая из операций не изменяет направления вектора AE и может изменить только его длину. Именно, если $|c| < 1$, эта длина уменьшится, если $|c| > 1$ — она увеличится, и, наконец, если $c = 1$, то она останется без изменения. Назовём эту операцию *растяжением* вектора AE в $|c|$ раз. Слово «растяжение» здесь нужно понимать в условном смысле; фактически растяжение будет иметь место только при $|c| > 1$, когда длина вектора AE увеличивается при умножении в $|c|$ раз. Однако мы будем пользоваться им и тогда, когда $|c| = 1$ (длина вектора AE не изменяется), а также и при $|c| < 1$ (длина вектора AE уменьшается при умножении).

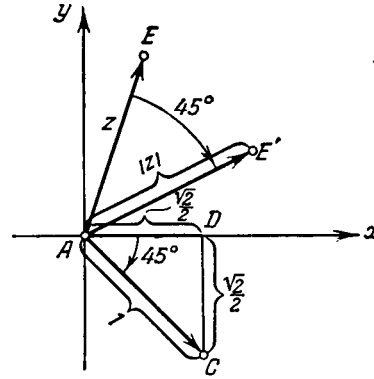


Черт. 20.

Если c — число действительное положительное, то $\operatorname{Arg} c = 0$. В этом случае поворот на угол $\operatorname{Arg} c$ не изменяет найденного посредством растяжения вектора AE_1; следовательно, точка E_1 изображает произведение zc. Можно сказать, что умножение z на действительное положительное число c геометрически означает растяжение вектора AE (изображающего z) в c раз. Меняя c, можно получать различные растяжения вектора AE. Так, чтобы получить растяжение в два раза, нужно умножить z на 2; чтобы получить растяжение в $\frac{2}{3}$ раза, нужно умножить z на $\frac{2}{3}$.

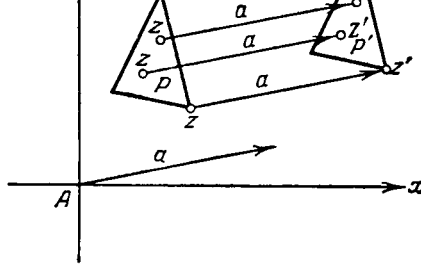
Если множитель c не является действительным положительным числом, то $\operatorname{Arg} c$ не равен нулю. В этом случае умножение z на c не сводится к одному только растяжению вектора AE, но требует ещё и поворота растянутого вектора около точки A на угол $\operatorname{Arg} c$. Следовательно, в общем случае действие умножения $z \cdot c$ означает *и растяжение* (в $|c|$ раз) *и поворот* (на угол $\operatorname{Arg} c$). В частном случае, когда абсолютная величина c равна единице, умножение на c сводится к одному только повороту вектора AE около точки A

на угол $\operatorname{Arg} c$. Выбирая c надлежащим образом, можно добиться поворота AE на любой угол. Так, например, если нужно повернуть AE на 90° в положительном направлении (против часовой стрелки), достаточно умножить z на i; в самом деле, $|i|=1$ и $\operatorname{Arg} i=90°$. Чтобы повернуть AE на 45° в отрицательном направлении по часовой стрелке, достаточно умножить z на комплексное число c, модуль которого равен единице, а аргумент равен —45°. Найти это число легко с помощью черт. 21, на котором представлена точка C, изображающая число c. Очевидно, что координаты точки C таковы: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $c=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак, умножение z на $c=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ равносильно повороту вектора AE (изображающего z) около точки A на угол 45° в отрицательном направлении.



Черт. 21.

17. Формулы $z'=z+a$ или $z'=cz$, как мы видели, преобразуют точку z в точку z'. Рассмотрим не одну, а бес-



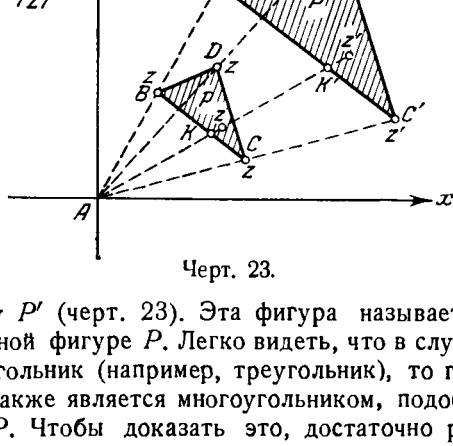
Черт. 22.

конечное множество точек z, составляющих какую-либо геометрическую фигуру P (например, треугольник; черт. 22). Если в каждой точке z применить формулу $z'=z+a$, то

из прежней точки получится новая z', сдвинутая на вектор a. Все эти сдвинутые точки составят новую фигуру P'. Очевидно, что её можно получить, если всю фигуру P как одно целое сдвинуть на вектор a. Итак, посредством формулы $z' = z + a$ можно преобразовать не только одну точку, но и целую фигуру (множество точек). Преобразование это сводится к сдвигу фигуры на вектор a. Конечно, новая фигура равна (конгруэнтна) первоначальной.

18. Можно применить к каждой точке z фигуры P формулу $z' = cz$. Если c — действительное положительное число, то каждая точка z фигуры P преобразуется в новую точку z', лежащую на том же луче, выходящем из A, на котором находится и точка z, причём отношение $\frac{|z'|}{|z|}$ (т. е. отношение расстояний точек z' и z до A) равно c. Такое преобразование в геометрии называется *гомотетией*, точки z' и z называются *гомотетичными точками*, точка A — *центром гомотетии*, а число c — *коэффициентом гомотетии*.

В результате гомотетии совокупность всех точек фигуры P перейдёт в некоторую новую совокупность точек, составляю-



Черт. 23.

щую фигуру P' (черт. 23). Эта фигура называется *гомотетичной* данной фигуре P. Легко видеть, что в случае, когда P есть многоугольник (например, треугольник), то гомотетичная фигура P' также является многоугольником, подобным многоугольнику P. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть, во что преобразуются при гомотетии точки, лежащие на одной из сторон BC многоугольника P (черт. 23).

Если B преобразуется в B', а C в C', то, соединяя B' и C' отрезком прямой, находим, что треугольники ABC и

$AB'C'$ подобны (угол A — общий и содержащие его стороны пропорциональны: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = c$). Отсюда следует, далее, что сторона $B'C'$ параллельна BC и $\frac{B'C'}{BC} = c$. Пусть K—точка, лежащая на BC; тогда луч AK встретит $B'C'$ в некоторой точке K', треугольники AKC и $AK'C'$ снова будут подобными и, следовательно, $\frac{AK'}{AK} = \frac{AC'}{AC} = c$. Поэтому точка K' будет гомотетичной точке K (относительно центра A при коэффициенте гомотетии, равном c). Отсюда заключаем, что все точки, лежащие на стороне BC, преобразуются при гомотетии в точки, лежащие на стороне $B'C'$; при этом каждая точка на $B'C'$ будет гомотетичной одной из точек, лежащих на BC. Итак, весь отрезок $B'C'$ будет гомотетичным отрезку BC. Повторяя это рассуждение для всех сторон многоугольника P, найдём, что все они преобразуются в стороны нового многоугольника P', причём соответствующие стороны будут попарно параллельны, а отношение их длин будет равно одному и тому же числу c:

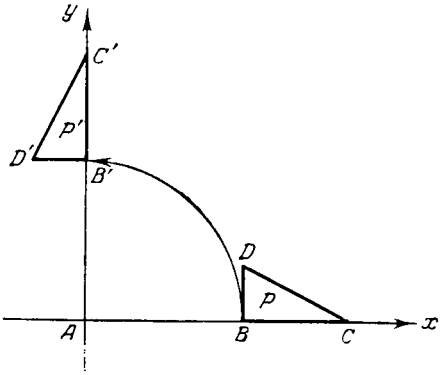
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = c.$$

Этим и доказывается подобие гомотетичных фигур P и P'.

Итак, посредством формулы $z' = cz$ (c — действительное положительное) можно преобразовать не только одну точку, но и целую фигуру P. Преобразование это является гомотетией с центром A и коэффициентом, равным c. В случае, когда P есть многоугольник, преобразованная фигура P' также является многоугольником, подобным P.

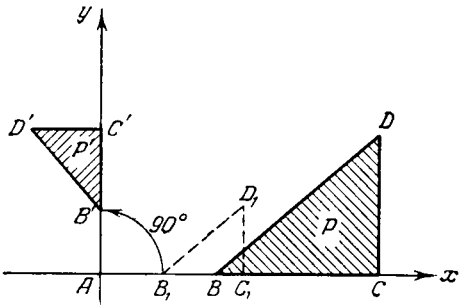
19. Пусть теперь число c в формуле $z' = cz$ не является положительным числом. Допустим сначала, что $|c| = 1$. В этом случае вся операция умножения сводится к повороту вектора Az около точки A на угол, равный аргументу z. Если эту операцию применить к каждой точке z фигуры P, то в результате вся фигура P окажется повёрнутой на угол $\operatorname{Arg} c$ около точки A. Следовательно, посредством формулы $z' = cz$, где $|c| = 1$, любая фигура P преобразуется в фигуру P', получаемую из P путём поворота около точки A на угол $\operatorname{Arg} c$. Возьмём, например, $c = i$; так как $\operatorname{Arg} i = 90°$, то преобразование $z' = iz$ сводится к повороту фигуры около точки A на 90°. На черт. 24 представлено, во что перейдёт треугольник при этом преобразовании.

Если в формуле $z' = cz$ не вводить условия $|c| = 1$, а просто считать c каким-либо комплексным числом (не



Черт. 24.

являющимся положительным и отличным от нуля), то соответствующее преобразование фигуры P можно будет выполнить в два этапа. Сначала произвести растяжение в $|c|$ раз, в результате чего фигура P преобразуется в гомотетическую



Черт. 25.

фигуру P_1, а затем повернуть P_1 около точки A на угол $\operatorname{Arg} c$.

На черт. 25 представлено, во что перейдёт треугольник P при преобразовании $z' = \frac{i}{2} z$ $\left(\text{здесь } \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ и } \operatorname{Arg} \frac{i}{2} = 90°\right)$.

20. В формулах $z' = z + a$ и $z' = cz$ можно рассматривать z как *независимое переменное*, а z' как *функцию*.

Это — простейшие *функции комплексного переменного* z. Выполняя над z и какими-либо постоянными комплексными числами действия сложения, вычитания, умножения и деления, а также возвышения в степень (последнее мы рассматриваем как повторное умножение), будем получать различные другие функции z, например

$$z' = \frac{1}{z}, \quad \text{или} \quad z' = z^2 + cz + d, \quad \text{или} \quad z' = \frac{z-a}{z-b} \quad \text{и т. д.}$$

Все такие функции комплексного переменного называются *рациональными*; названы они так потому, что сами действия, с помощью которых определяются эти функции (сложение, вычитание, умножение и деление), носят название *рациональных*. Рациональными функциями не исчерпываются все функции комплексного переменного; можно, например, определить и изучить функции вида $z' = \sqrt[n]{z}$, $z' = a^z$, $z' = \sin z$ и др. Однако в этой книжке мы ограничимся одними только рациональными функциями и притом простейшими из них.

21. Мы видели, что функциям $z' = z + a$ или $z'' = cz$ соответствуют определённые геометрические преобразования фигур на плоскости. Именно, если переменное z пробегает точки фигуры P, то функция $z' = z + a$ пробегает точки фигуры P', получающейся из P путём сдвига на вектор a, а функция $z'' = cz$ пробегает точки фигуры P'', получающейся из P путём преобразования гомотетии с коэффициентом $|c|$ и поворота около точки A на угол $\operatorname{Arg} c$. Можно сказать, следовательно, что сама функция $z' = z + a$ производит преобразование сдвига, а функция $z' = cz$ производит преобразование гомотетии и поворота (если c — действительное положительное число, то дело сводится к одной гомотетии, а если $|c| = 1$, но $c \neq 1$, то — к одному повороту). Возникает вопрос, что можно сказать о преобразованиях, производимых другими функциями комплексного переменного, в частности рациональными функциями. Этим вопросом мы и займёмся на дальнейших страницах книжки. А чтобы читатель понял, что такое занятие не является праздным, мы сообщим ему уже здесь, что преобразования, производимые рациональными функциями комплексного переменного, отличаясь удивительным разнообразием и богатством геометрических свойств, имеют вместе с тем и нечто общее. А именно, хотя при этих преобразованиях величина и вид фигуры, вообще говоря, изменяются, однако остаются неизменными

фигуры около точки A на 90°. На рис. 24 показано, во что перейдет треугольник при этом преобразовании.

Если в формуле $z' = cz$ не вводить условия $|c| = 1$, а просто считать c каким-либо комплексным числом (не

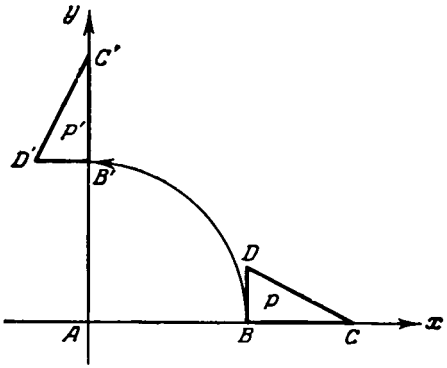


Рис. 24.

являющимся положительным и отличным от нуля), то соответствующее преобразование фигуры P можно будет выполнить в два этапа. Сначала произвести растяжение в $|c|$ раз, в результате чего фигура P преобразуется в гомотетичную фигуру P_1, а затем повернуть P_1 около точки A на угол $\operatorname{Arg} c$.

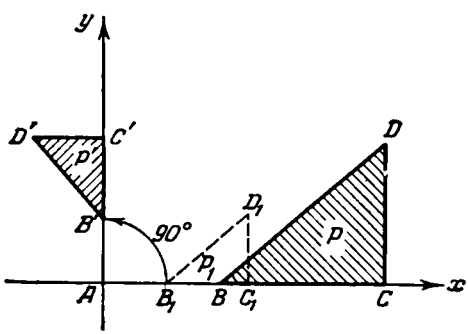


Рис. 25.

На рис. 25 показано, во что перейдет треугольник P при преобразовании $z' = \frac{1}{2} z$ $\left(\text{здесь } \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ и } \operatorname{Arg} \frac{1}{2} = 90°\right)$.

20. В формулах $z' = z + a$ и $z' = cz$ можно рассматривать z как *независимое переменное*, а z' как *функцию*.

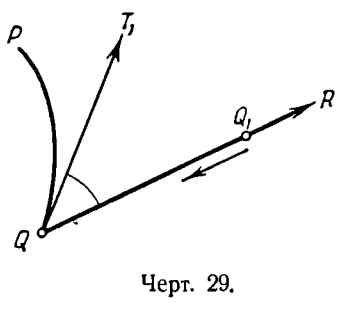
Это — простейшие *функции комплексного переменного* z. Выполняя над z и какими-либо постоянными комплексными числами действия сложения, вычитания, умножения и деления, а также возвышения в степень (последнее мы рассматриваем как повторное умножение), будем получать различные другие функции z, например

$$z' = \frac{1}{z}, \quad \text{или} \quad z' = z^2 + cz + d, \quad \text{или} \quad z' = \frac{z-a}{z-b} \quad \text{и т. д.}$$

Все такие функции комплексного переменного называются *рациональными*; названы они так потому, что сами действия, с помощью которых определяются эти функции (сложение, вычитание, умножение и деление), носят название *рациональные*. Рациональными функциями не исчерпываются все функции комплексного переменного; можно, например, определить и изучить функции вида $z' = \sqrt[n]{z}$, $z' = a^z$, $z' = \sin z$ и др. Однако в этой книжке мы ограничимся одними только рациональными функциями и притом простейшими из них.

21. Мы видели, что функциям $z' = z + a$ или $z'' = cz$ соответствуют определенные геометрические преобразования фигур на плоскости. Именно, если переменное z пробегает точки фигуры P, то функция $z' = z + a$ пробегает точки фигуры P', получающейся из P путем сдвига на вектор a, а функция $z'' = cz$ пробегает точки фигуры P'', получающейся из P путем преобразования гомотетии с коэффициентом $|c|$ и поворота около точки A на угол $\operatorname{Arg} c$. Можно сказать, следовательно, что сама функция $z' = z + a$ производит преобразование сдвига, а функция $z' = cz$ производит преобразование гомотетии и поворота (если c — действительное положительное число, то дело сводится к одной гомотетии, а если $|c| = 1$, но $c \neq 1$, то — к одному повороту). Возникает вопрос, что можно сказать о преобразованиях, производимых другими функциями комплексного переменного, в частности рациональными функциями. Этим вопросом мы и займемся на последующих страницах книжки. А чтобы читатель понял, что такое занятие не является праздным, мы сообщим ему уже здесь, что преобразования, производимые рациональными функциями комплексного переменного, отличаясь удивительным разнообразием и богатством геометрических свойств, имеют вместе с тем и нечто общее. А именно, хотя при этих преобразованиях величина и вид фигуры, вообще говоря, изменяются, однако остаются неизменными

Возьмём на кривой QP какую-либо точку Q_1, отличную от Q, и проведём секущую QQ_1. Точно так же на кривой QR возьмём точку Q_2, отличную от Q, и проведём секущую QQ_2. Величину угла Q_1QQ_2 можно рассматривать как приближённое значение величины криволинейного угла PQR. Чем ближе к точке Q будут лежать точки Q_1 и Q_2, тем теснее секущие будут прилегать к кривым QP и QR возле точки Q. Поэтому и угол Q_1QQ_2 можно тогда рассматривать как всё более и более хорошее приближённое значение величины угла, составленного нашими кривыми в точке Q. Если Q_1 будет перемещаться по кривой QP, а Q_2 — по кривой QR, неограниченно приближаясь к Q, то секущие QQ_1 и QQ_2 будут поворачиваться около точки Q, приближаясь к предельным положениям QT_1 и QT_2. Лучи QT_1 и QT_2 теснее, чем любые другие лучи, проходящие через Q, примыкают к нашим кривым около этой точки. Они называются *касательными к кривым* QP и QR, а угол T_1QT_2 между ними принимается за меру угла в точке Q между кривыми QP и QR. Итак, *углом между двумя кривыми, пересекающимися в некоторой точке, называется угол между касательными к кривым, проведёнными в этой точке.*



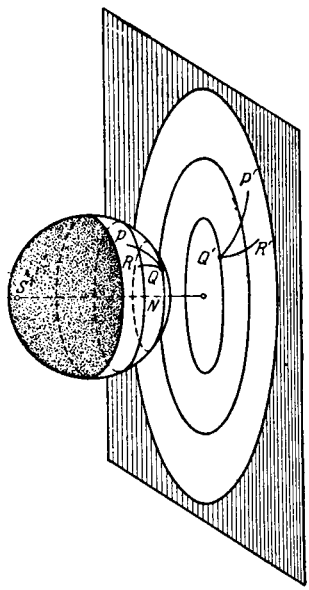
Черт. 29.

Это определение применимо и к случаю угла, образованного в точке Q некоторой кривой QP и прямой QR (черт. 29). Пусть QT_1 — касательная к QP в точке Q. Чтобы воспользоваться определением, нужно и прямую QR заменить касательной к этой прямой. Но легко понять, что касательная к прямой QR совпадает с этой самой прямой. В самом деле, чтобы получить секущую, нужно на QR взять точку Q_1, отличную от Q, и провести прямую через Q и Q_1. Очевидно, что это будет та же прямая QR. Если Q_1 приближается к Q, то найденная нами секущая остаётся неизменной. Поэтому касательная, являющаяся предельным положением секущей, есть снова прямая QR. Следовательно, угол между кривой QP и прямой QR должен пониматься как угол между касательной QT_1 к кривой QP в точке Q и самой прямой QR. Может случиться, что QR и есть касательная к QP (т. е. QR совпадает с QT_1); тогда угол между QR и QP

обратится в нуль. Следовательно, угол к точке Q между кривой и касательной к ней, проведённой в этой точке, равен нулю.

24. Конформные отображения имеют многочисленные применения. Так, например, они применяются в картографии при построении географических карт.

Каждая географическая карта изображает часть земной поверхности на плоскости (на листе бумаги). При таком изображении очертания материков, морей и океанов подвергаются большему или меньшему искажению. Читатель легко убедится, что невозможно расправить и наложить на плоскость без растягивания и сжатия, без разрывов и складок кусок шаровой поверхности (например, часть сломанного шарика для настольного тенниса). В силу этой же причины без искажения пропорций, а следовательно, и без нарушения формы невозможно изобразить часть земной поверхности (последнюю можно принять за шаровую) на плоскости, т. е. построить карту. Оказывается, однако, что можно строить карту, не изменяя величины углов между различными линиями на земной поверхности.

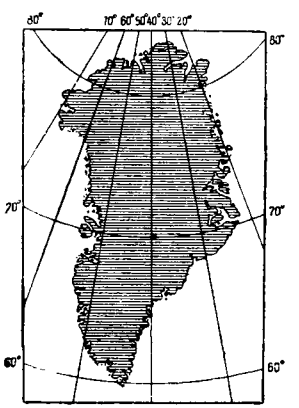


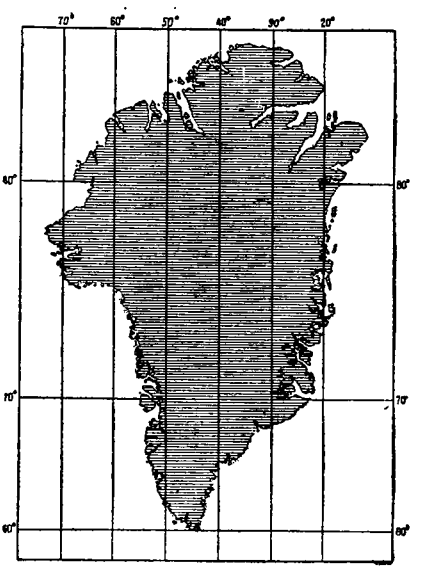
Черт. 30.

Пусть нужно построить карту северного полушария, на которой все углы между различными направлениями на земной поверхности изобразятся в натуральную величину. Чтобы наглядно представить себе, как это можно сделать, вообразим большой земной глобус из какого-либо прозрачного материала, например стекла, закрашенный непрозрачными красками так, что лишь контуры материков, стран и морей в северном полушарии, а также сетка меридианов и параллелей остаются непокрытыми краской и, следовательно, прозрачными. Кроме того, можно оставить незакрашенными стороны (криволинейные) какого-либо угла PQR с вершиной в любой точке северного полушария. Если в южном полюсе глобуса впаяна маленькая, но яркая электрическая лампочка, а перед глобусом перпендикулярно к его оси помещён

экран, то в тёмной комнате мы увидим на экране контурную карту северного полушария (черт. 30). Можно доказать геометрически, что на такой карте (она называется картой *стереографической проекции*) все углы между любыми линиями на глобусе в северном полушарии изобразятся в натуральную величину. В частности, в натуральную величину изобразится и угол PQR.

25. Выше мы рассказали о том, как можно получить карту северного полушария с сохранением натуральной величины всех углов. Если источник света (лампочку), откуда исходят проектирующие лучи, поместить не в южном, а в северном полюсе глобуса, то этим же путём можно получить карту южного полушария также с сохранением нату-





Черт. 31.

ральной величины всех углов. Каждая из полученных указанным путём карт представляет некоторую плоскую фигуру; если её подвергнуть конформному отображению, она перейдёт в новую фигуру, которую также можно рассматривать как географическую карту. Так как при конформном отображении углы не изменяются, то на новой карте будут сохраняться натуральные величины углов между направлениями на земной поверхности. На черт. 31 слева изображена карта Гренландии в стереографической проекции,

а справа — карта, которая получается из предыдущей, если ко всем её точкам применить преобразование по формуле

$$z' = \log_e |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Здесь в качестве основания логарифмов берётся так называемое неперово число $e = 2{,}71828\ldots$, а $\operatorname{Arg} z$ измеряется не в градусах, а в радианах.

Без сомнения формула эта выглядит сложной и искусственной. Мы не имеем возможности рассматривать её здесь подробно и проверять, что преобразование, совершаемое по этой формуле, на самом деле является конформным. Скажем только, что карта, получившаяся в результате такого преобразования, была построена около 400 лет назад голландским учёным Меркатором. Она получила с тех пор большое распространение в навигации. Её преимущества перед картой, выполненной в стереографической проекции, состоят в том, что здесь не только меридианы, но и параллели изображаются прямыми линиями; более того, прямыми линиями изображаются здесь также любые пути на поверхности Земли, вдоль которых стрелка компаса сохраняет неизменное направление (так называемые локсодромы).

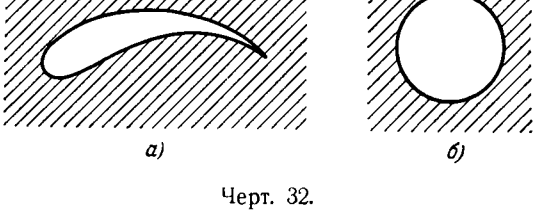
26. Наиболее важные применения конформных отображений относятся к вопросам физики и механики. Во многих вопросах, где речь идёт, например, об электрическом потенциале в точках пространства, окружающего заряженный конденсатор, или о температуре вокруг нагретого тела, о скоростях частиц жидкости или газа в потоке, движущемся в некотором канале и обтекающем при этом какие-либо препятствия и т. п., нужно уметь вычислить потенциал, температуру, скорости и т. п. Такие задачи могут быть разрешены без больших трудностей в случае, когда встречающиеся в них тела имеют особенно простую форму (например, в виде плоских пластин или круговых цилиндров). Однако расчёт нужно уметь производить и во многих других случаях. Например, чтобы рассчитать самолёт при его конструировании, нужно уметь подсчитывать скорости частиц воздуха в потоке, обтекающем крыло самолёта *).

Крыло самолёта в поперечном разрезе (профиль крыла) имеет вид, представленный на черт. 32, *а*. Между тем расчёт

*) При полёте самолёта, конечно, движутся и частицы воздуха и самоё крыло. Опираясь на законы механики, можно, однако, свести всё исследование к случаю, когда крыло неподвижно, а на него набегает и обтекает вокруг поток воздуха.

скоростей производится особенно просто, когда поперечный разрез обтекаемого тела есть круг (т. е. само тело есть круглый цилиндр) (черт. 32, *б*).

Так вот, оказывается, что для того, чтобы свести задачу о скоростях частиц потока воздуха, обтекающего крыло самолёта, к более простой задаче обтекания круглого цилиндра, достаточно конформно отобразить фигуру, заштри-



а) *б)*

Черт. 32.

хованную на черт. 32, *а* (*внешность профиля крыла*), на заштрихованную фигуру на черт. 32, *б* (*внешность окружности*). Такое отображение осуществляется посредством некоторой функции комплексного переменного. Знание этой функции позволяет перейти от скоростей в потоке, обтекающем круглый цилиндр, к скоростям в потоке, обтекающем крыло самолёта, и следовательно, полностью решить поставленную задачу.

Подобным же образом конформное отображение позволяет сводить решение задач о расчёте электрического потенциала и температур от случая тел произвольной формы (любого профиля сечения) к простейшим случаям, где задача уже является решённой. Обратный переход к пространству, окружающему первоначально заданные наэлектризованные (или нагретые) тела, достигается с помощью той же функции комплексного переменного, которая осуществляет конформное отображение.

27. Всё сказанное выше о применении конформного отображения к вопросам картографии, механики и физики не сопровождалось никакими доказательствами. Доказательства мы и не сумеем дать в этой книжке, так как для их понимания от читателя потребовались бы такие знания, которые дают лишь высшие учебные заведения.

Теперь мы до конца книжки будем заниматься простейшими рациональными функциями, с помощью которых можно вы-

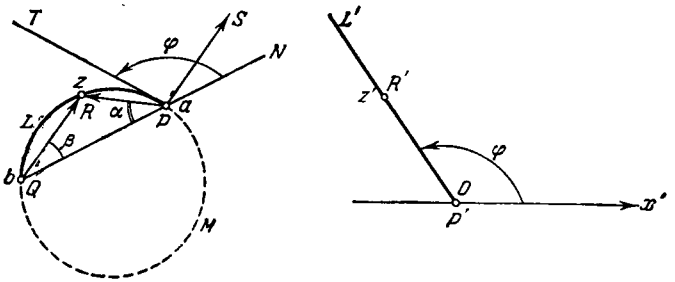
Николай Егорович ЖУКОВСКИЙ
(1847—1921)

широко использовал комплексные числа и конформные отображения для расчёта самолётов.

полнить некоторые конформные отображения. Вот функции, о которых пойдёт речь: 1) $z' = \frac{z-a}{z-b}$ (так называемая *дробно-линейная функция*); 2) $z' = z^2$; 3) $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Последняя из них носит имя знаменитого русского учёного Николая Егоровича Жуковского (1847—1921), которого В. И. Ленин по справедливости назвал «отцом русской авиации». Называется эта функция функцией Жуковского потому, что Н. Е. Жуковский успешно применял её к решению некоторых вопросов теории самолёта; в частности, он показал, как с помощью этой функции можно получать некоторые профили крыла самолёта, имеющие и теоретическое и практическое значение.

Об этом применении функции Жуковского мы ещё расскажем.

28. Начнём с дробно-линейной функции $z' = \frac{z-a}{z-b}$. Здесь a и b — неравные между собой комплексные числа. Покажем, что посредством этой функции каждая дуга PLQ окружности, соединяющая точки a и b, преобразуется в некоторый прямолинейный луч $P'L'$, выходящий из начала координат, причём угол между положительным направлением действительной оси и этим лучом равен углу между направлением baN и касательной к дуге окружности в точке a (черт. 33).

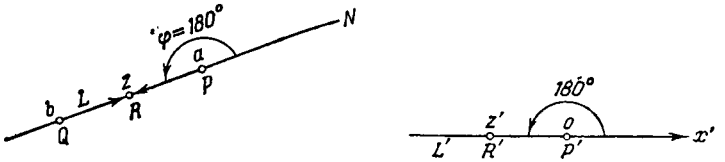


Черт. 33.

Пусть точка z лежит на дуге PLQ (черт. 33 слева); докажем, что её образ $\left(\text{т. е. соответствующая ей точка } z' = \frac{z-a}{z-b}\right)$ должен лежать на луче $P'L'$ (черт. 33 справа). Чтобы построить вектор z', нужно знать длину этого вектора ($|z'|$) и угол

наклона к положительной части действительной оси ($\operatorname{Arg} z'$). Но z' есть частное комплексных чисел $z-a$ и $z-b$, изображаемых векторами PR и QR. Поэтому $|z'|=\frac{|z-a|}{|z-b|}$, а $\operatorname{Arg} z'$ равен углу SPR (вектор PS имеет такую же длину и направление, как и QR), отсчитываемому в направлении от PS к PR. Очевидно, что $\widehat{SPR}=\widehat{QRP}$*) и, следовательно, измеряется половиной дуги QMP. Половиной этой же дуги измеряется и угол NPT. Поэтому $\operatorname{Arg} z'=\widehat{SPR}=\widehat{QRP}=\widehat{NPT}=\varphi$. Итак, при любом положении точек z на дуге PLQ соответствующие точки $z'=\frac{z-a}{z-b}$ имеют один и тот же аргумент φ. А это означает, что все эти точки лежат на одном и том же луче $P'L'$, наклонённом к положительной части действительной оси под углом φ.

Этот вывод справедлив и в том случае, когда PLQ — не дуга окружности, а прямолинейный отрезок PQ. Тогда нужно считать угол $\varphi=180°$ и луч $P'L'$ совпадающим с отрицательной частью действительной оси (черт. 34). В самом деле,



Черт. 34.

если z лежит на отрезке PQ, то векторы, изображающие $z-a$ и $z-b$, направлены в прямо противоположные стороны. Отсюда следует, что частное $z'=\frac{z-a}{z-b}$ есть действительное отрицательное число, т. е. z' лежит на отрицательной части действительной оси.

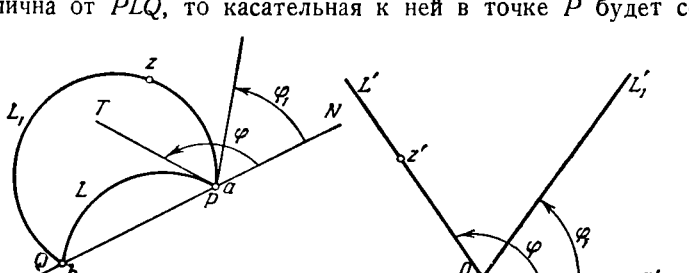
Мы доказали, что образы точек дуги PLQ лежат на луче $P'L'$. Но заполняют ли они весь луч $P'L'$ или же на последнем имеются точки, не являющиеся образами ни одной из точек дуги PLQ? Покажем, что образы заполняют весь луч.

---

*) Запись $\widehat{ABC}$ означает угол ABC.

Начнём с точки P' (начало координат); эта точка является образом точки P, так как $z' = \frac{z-a}{z-b}$ обращается в нуль при $z = a$. Возьмём какую-либо точку z' на луче $P'L'$ (черт. 35), отличную от P' (т. е. $z' \neq 0$). Очевидно, что z' не может быть действительным положительным числом, так как луч $P'L'$ не совпадает с положительной частью действительной оси.

Рассматривая z как неизвестное, решим уравнение $z' = \frac{z-a}{z-b}$ относительно z; найдём $zz' - z'b = z - a$, откуда $z = \frac{z'b-a}{z'-1}$. Итак, для каждой точки z', лежащей на $P'L'$, существует одно и только одно значение z, такое, что $z' = \frac{z-a}{z-b}$, т. е. такое, что z' является образом z. Но где лежит эта точка z? Может ли быть, что она не лежит на PLQ? Убедимся, что это невозможно. Прежде всего, точка z не может лежать на прямой, являющейся продолжением отрезка PQ (вне этого отрезка). В противном случае числа $z-a$ и $z-b$ имели бы одинаковые аргументы и $z' = \frac{z-a}{z-b}$ было бы положительным числом. Но если z не лежит на указанной прямой вне отрезка PQ, то P и Q можно соединить дугой окружности так, чтобы эта дуга прошла через z (если допустить, что точка z лежит на отрезке PQ, то вместо дуги следует взять этот самый отрезок). Обозначим эту дугу через PL_1Q; так как она отлична от PLQ, то касательная к ней в точке P будет со-



Черт. 35.

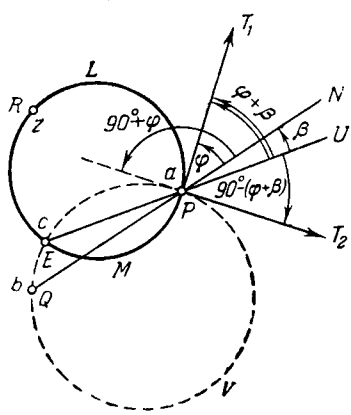
ставлять с направлением baN угол φ_1, не равный φ (черт. 35). Поэтому значение функции $z' = \frac{z-a}{z-b}$ в этой точке должно изображаться точкой луча $P'L_1'$, наклонённого к положительной части действительной оси под углом φ_1 и, следовательно,

не совпадающего с $P'L'$. Мы пришли к противоречию, так как получилось, что точка z', отличная от точки P', должна находиться и на луче $P'L'$ и на луче $P'L'_1$. Итак, доказано, что каждая точка z', лежащая на $P'L'$, является образом единственной точки z $\left(z' = \frac{z-a}{z-b}\right)$, причём z лежит на PLQ. Отсюда следует, что если точка z' будет пробегать луч $P'L'$, то соответствующая ей точка z, определяемая из уравнения $z' = \frac{z-a}{z-b}$, будет пробегать дугу PLQ.

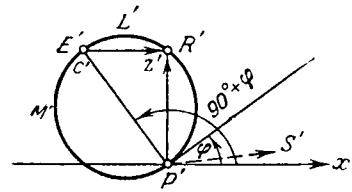
Покажем, наконец, что когда z описывает дугу PLQ, перемещаясь в одном и том же направлении от точки P к точке Q, точка z' описывает луч $P'L'$ также в одном и том же направлении, неограниченно удаляясь от точки P'. Для этого достаточно показать, что расстояние $P'R' = |z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{PR}{QR} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (черт. 33) возрастает при указанном движении точки, принимая неограниченно большие значения. Но $\varphi + \alpha + \beta = 180°$, откуда $\beta = 180° - (\alpha + \varphi)$, $\sin\beta = \sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi$ и, следовательно, $P'R' = |z'| = \frac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\sin\alpha} = \cos\varphi + \sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha$. Когда точка z движется по PLQ от P к Q, то угол α убывает от $180° - \varphi$ до нуля, а угол φ остаётся неизменным. Поэтому $\operatorname{ctg}\alpha$ возрастает от значения $-\operatorname{ctg}\varphi$ до $+\infty$ и $|z'| = \cos\varphi + \operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi$ также возрастает (в силу положительности числа $\sin\varphi$) от значения $\cos\varphi - \operatorname{ctg}\varphi\sin\varphi = 0$ до $+\infty$.

29. Рассмотрим какую-либо окружность PLM, проходящую через точку a, но не проходящую через точку b (черт. 36). Пусть угол между касательной в точке a и направлением baN равен φ. Проведём через точки a и b вспомогательную окружность, для которой касательная в точке a будет составлять с направлением baN угол $\varphi + 90°$. Эта окружность пересечёт первоначальную окружность в некоторой точке E; обозначим через c комплексное число, изображаемое этой точкой. Покажем, что посредством функции $z' = \frac{z-a}{z-b}$ окружность PLM преобразуется в окружность $P'L'M'$ (черт. 36), опирающуюся, как на диаметр, на отрезок $P'E'$, где точка P' изображает число 0, а точка E' — число $c' = \frac{c-a}{c-b}$. При этом касательная к окружности $P'L'M'$ в точке P' образует с положительным направлением действительной оси угол φ.

Итак, мы собираемся доказать, что для каждой точки z, лежащей на PLM, соответствующая точка $z' = \frac{z-a}{z-b}$ лежит на окружности $P'L'M'$, для которой точки 0 и $c' = \frac{c-a}{c-b}$ являются концами диаметра. Достаточно, очевидно, показать, что из каждой точки $z' = \frac{z-a}{z-b}$ (при условии, что z лежит на PLM) отрезок $P'E'$ виден под прямым углом, т. е. что угол $E'R'P'$ равен прямому углу *). Но угол $E'R'P'$ образован векторами $E'R'$ и $P'R'$, изображающими числа $z'-c'$



а)



б)

Черт. 36.

и z'; он равен углу $S'P'R'$ (вектор $P'S'$ имеет такую же длину и направление, как и вектор $E'R'$), отсчитываемому в направлении от $P'S'$ к $P'R'$. Последний угол равен $\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$, поэтому интересующий нас угол $P'R'E'$ также совпадает с аргументом числа $\frac{z'}{z'-c'}$, т. е. $\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$. Преобразуем выражение $\frac{z'}{z'-c'}$, заменив z' через $\frac{z-a}{z-b}$ и c' через $\frac{c-a}{c-b}$. Получим:

$$\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z-a}{z-b} : \left(\frac{z-a}{z-b} - \frac{c-a}{c-b}\right) = \frac{z-a}{z-b} : \frac{(z-c)(a-b)}{(z-b)(c-b)} =$$

$$= \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c} = \frac{z''}{b''}.$$

*) Потому что точки плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом, лежат на окружности, построенной на этом отрезке, как на диаметре.

Мы положили здесь $\frac{z-a}{z-c}=z''$ и $\frac{b-a}{b-c}=b''$. Очевидно, что z'' является также дробно-линейной функцией z. Эта функция $z''=\frac{z-a}{z-c}$ отличается от нашей исходной функции $z'=\frac{z-a}{z-b}$ лишь заменой точки b на точку c. К новой функции применимо то, что было доказано в п. 28. А именно, если точка z находится на дуге окружности, соединяющей a и c, то точка z'' должна находиться на некотором прямолинейном луче, выходящем из начала координат. При этом, если касательная в точке a к дуге окружности составляет с направлением caU некоторый угол α, то соответствующий прямолинейный луч составляет с положительным направлением действительной оси также угол α; иными словами, аргумент z'' равен α. Так как точка z находится на дуге окружности PLE, проходящей через точки a и c, а угол между касательной PT_1 к этой окружности и направлением caU равен $\beta+\varphi$ (черт. 36, *а*), то аргумент числа $z''=\frac{z-a}{z-c}$ должен также равняться $\beta+\varphi$ для всех положений z на дуге PLE. С другой стороны, точка b лежит на дуге PVE окружности, соединяющей точки a и c. Касательная PT_2 в точке a к этой дуге составляет угол $(\beta+\varphi)-90°$ с направлением caU (по абсолютной величине этот угол равен $90°-(\beta+\varphi)$, но из черт. 36, *а* видно, что в нашем случае он отсчитывается в отрицательном направлении и, следовательно, должен быть взят со знаком —). Поэтому значение дробно-линейной функции $\frac{z-a}{z-c}$, соответствующее $z=b$, т. е. число $b''=\frac{b-a}{b-c}$, должно изображаться точкой луча, выходящего из начала координат под углом $(\beta+\varphi)-90°$ к положительному направлению действительной оси, т. е. $\operatorname{Arg} b''=(\beta+\varphi)-90°$.

Вспомним, что мы хотели определить угол:

$$\widehat{P'R'E'}=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}.$$

Мы нашли, что $\frac{z'}{z'-c'}=\frac{z''}{b''}$, и далее, что

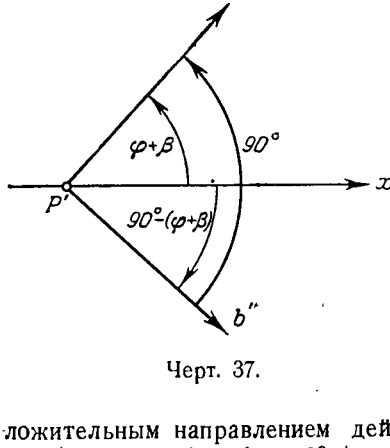
$$\operatorname{Arg} z''=\beta+\varphi,\quad \operatorname{Arg} b''=(\beta+\varphi)-90°;$$

отсюда следует, что $\operatorname{Arg}\frac{z''}{b''}=90°$ (черт. 37), и

$$\widehat{P'R'E'}=\operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}=\operatorname{Arg}\frac{z''}{b''}=90°.$$

Итак, из каждой точки $z' = \frac{z-a}{z-b}$ отрезок $P'E'$ виден под прямым углом. Это означает, что точка z' лежит на окружности $P'L'M'$, для которой отрезок $P'E'$ служит диаметром*).

Нужно ещё показать, что касательная в точке P' к этой окружности составляет угол φ с положительным направлением действительной оси. Для этого достаточно показать, что угол между диаметром $P'E'$ и этим направлением оси равен $\varphi+90°$. Последний угол совпадает с $\operatorname{Arg} c' = \operatorname{Arg}\frac{c-a}{c-b}$. Но точка c лежит на дуге PEQ окружности, соединяющей точки a и b. Так как касательная в точке a к этой дуге составляет с направлением baN угол $90°+\varphi$, то точка $c' = \frac{c-a}{c-b}$ должна лежать на луче, составляющем с положительным направлением действительной оси также угол $90°+\varphi$, т. е. $\operatorname{Arg} c' = 90°+\varphi$, что и нужно было доказать.

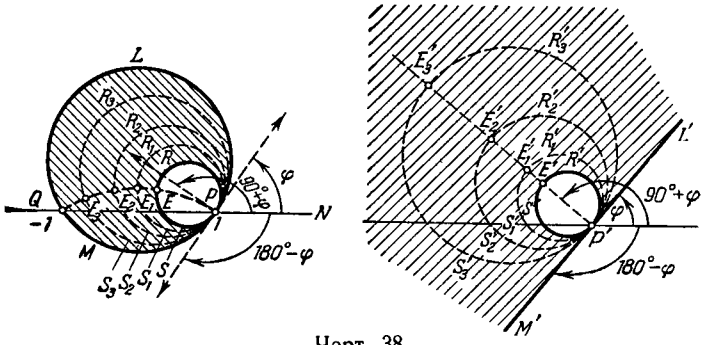


Черт. 37.

30. В виде примера выясним, во что преобразуется фигура, заштрихованная на черт. 38 слева, при отображении посредством функции $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Эта функция имеет вид $\frac{z-a}{z-b}$, причём $a=1$ и $b=-1$. Так как дуга PLQ проходит через точки 1 и -1 и образует в точке $a=1$ угол φ с направлением QPN, то она по п. 28 преобразуется в луч $P'L'$, выходящий из начала координат и образующий также угол φ

*) При доказательстве мы брали точку z на дуге PLE; тогда соответствующая точка z' попадает на полуокружность $P'L'E'$. Если точку z брать на дуге EMP, то доказательство ни в чём не изменится; нужно будет только заметить, что направление касательной в точке a к этой дуге прямо противоположно PT_1. Это означает, что $\operatorname{Arg} z''$ будет равен не $\beta+\varphi$, а $\beta+\varphi-180°$. Поэтому для угла $\widehat{P'R'E'} = \operatorname{Arg}\frac{z'}{z'-c'}$ получим значение $(\beta+\varphi-180°)-(\beta+\varphi-90°)= -90°$. Это соответствует положению точки z' на полуокружности $E'M'P'$.

с положительным направлением действительной оси. Дуга PMQ соединяет те же точки 1 и -1, но она образует в точке $a=1$ угол $\varphi-180°$ с направлением QPN (по абсолютной величине этот угол равен $180°-\varphi$; мы учли, однако, что он отсчитывается по часовой стрелке, т. е. в отрицательном направлении). Поэтому функция $z'=\frac{z-1}{z+1}$ преобразует дугу PMQ в луч $P'M'$, выходящий из начала координат и



Черт. 38.

образующий угол $\varphi-180°$ с положительным направлением действительной оси. Очевидно, что лучи $P'L'$ и $P'M'$ составляют вместе одну прямую; следовательно, функция $z'=\frac{z-1}{z+1}$ преобразует всю окружность $PLQM$ (состоящую из дуг PLQ и PMQ) во всю прямую $M'P'L'$.

Проведём через точки P и Q дугу вспомогательной окружности, для которой касательная в точке P образует с QPN угол $\varphi+90°$. Эта дуга пересечёт окружность PRS в точке E. По п. 28 дуга PEQ преобразуется посредством функции $z'=\frac{z-1}{z+1}$ в луч, выходящий из точки P' и наклонённый под углом $\varphi+90°$ к положительному направлению действительной оси. При этом точка E преобразуется в некоторую точку E' этого луча. По п. 29 окружность $PRES$ преобразуется посредством функции $z'=\frac{z-1}{z+1}$ в окружность $P'R'E'S'$, построенную на отрезке $P'E'$, как на диаметре.

Итак, в результате преобразования окружность $PLQM$ переходит в прямую $M'P'L'$, а окружность $PRES$, касающаяся первой изнутри, переходит в окружность $P'R'E'S'$,

касающуюся прямой $M'P'L'$ в точке P'. Можно ли считать, что мы уже решили вопрос о преобразовании заштрихованной фигуры посредством функции $z' = \frac{z-1}{z+1}$? Нет, задача ещё до конца не решена: ведь мы нашли только, во что переходит контур этой фигуры, а нужно ещё проследить за преобразованием точек фигуры, заключённых между окружностями $PRES$ и $PLQM$.

Чтобы выяснить и эту сторону дела, заметим, что всю заштрихованную фигуру можно было бы заполнить окружностями, касающимися $PLQM$ в точке P и заключёнными между $PRES$ и $PLQM$. Они будут пересекать дугу PEQ в точках, лежащих между E и Q. На черт. 38 изображены пунктиром три из бесчисленного множества таких окружностей, пересекающие дугу PEQ в точках E_1, E_2 и E_3. Если мы проследим, в какие линии преобразуются эти окружности посредством функции $z' = \frac{z-1}{z+1}$, то можно будет составить представление и о виде фигуры, заполняемой всеми такими линиями. Это и будет преобразованная фигура.

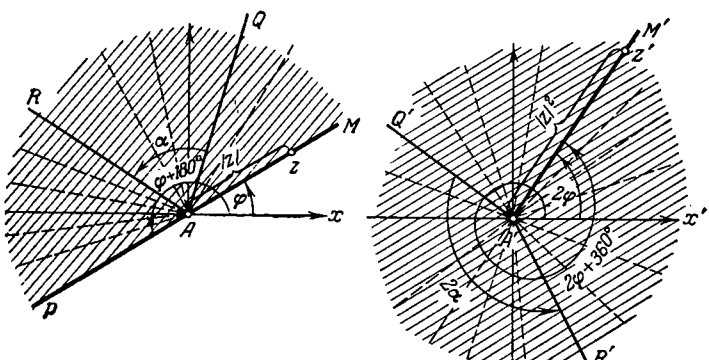
Но, применяя выводы п. 29, заключаем, что окружность $PR_1E_1S_1$ преобразуется в окружность $P'R_1'E_1'S_1'$, окружность $PR_2E_2S_2$ — в $P'R_2'E_2'S_2'$ и т. п.

В конце п. 28 мы показали, что по мере того, как точка z перемещается по дуге PQ, приближаясь к Q, соответствующая ей точка z' перемещается по лучу, всё далее отодвигаясь от начальной точки P'. Отсюда следует, что если точка E_2 ближе к Q, чем точка E_1, то E_2' — образ точки E_2 — лежит на луче дальше от P', чем E_1' — образ точки E_1. Поэтому диаметр $P'E_2'$ окружности $P'R_2'E_2'S_2'$ — образа окружности $PR_2E_2S_2$ — должен быть больше диаметра $P'E_1'$ окружности $P'R_1'E_1'S_1'$ — образа окружности $PR_1E_1S_1$, как это и показано на нашем чертеже. Если взять окружность $PR_3E_3S_3$, пересекающую PEQ достаточно близко к Q, то можно добиться того, что её образ $P'R_3'E_3'S_3'$ будет иметь сколь угодно большой диаметр. Ясно, что все образы окружностей, таких, как $PR_1E_1S_1$, $PR_2E_2S_2$, $PR_3E_3S_3$ и т. д., заполняющих фигуру, заштрихованную на черт. 38 слева, будут в свою очередь заполнять фигуру, заштрихованную на том же чертеже справа. Она и является образом первоначальной фигуры при отображении посредством функции $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Итак, функция

$z' = \frac{z-1}{z+1}$ отображает фигуру, ограниченную двумя окружностями (черт. 38 слева), на фигуру, ограниченную прямой и окружностью (черт. 38 справа).

31. Займёмся теперь преобразованием посредством функции $z' = z^2$. В сноске на стр. 24 мы предупреждали читателя, что возможно исключение из общего правила о сохранении углов при преобразованиях посредством рациональных функций. А именно, что углы с вершинами в некоторых исключительных точках могут изменяться в несколько раз. В данном случае имеется такая исключительная точка; это — начало координат A. Мы покажем, что все углы с вершиной в A увеличиваются вдвое при преобразовании $z' = z^2$.

Возьмём луч AM, выходящий из точки A и составляющий угол φ с положительной частью действительной оси (черт. 39).



Черт. 39.

Для каждой точки z, лежащей на этом луче, $\operatorname{Arg} z = \varphi$. Так как вектор $z' = z^2 = z \cdot z$ получается из вектора z путём растяжения в $|z|$ раз и поворота на угол $\operatorname{Arg} z = \varphi$, то $|z'| = |z| \cdot |z| = |z|^2$, а $\operatorname{Arg} z' = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z = 2\varphi$. Поэтому точка z' должна лежать на луче $A'M'$, выходящем из точки A' и составляющем с положительной частью действительной оси угол 2φ. Если точка z будет перемещаться по AM, начиная от точки A и далее, неограниченно отодвигаясь от неё, то соответствующая точка z' будет перемещаться по $A'M'$, начиная от точки A' и далее, неограниченно отодвигаясь от неё; при этом расстояние от z' до A' всегда будет равняться квадрату расстояния от z до A ($|z'| = |z|^2$).

Отсюда следует, что функция $z' = z^2$ преобразует луч AM в луч $A'M'$, наклонённый к оси $A'x'$ под углом, вдвое бóльшим по сравнению с первоначальным углом наклона.

Легко понять, что луч AP, составляющий с Ax угол $\varphi + 180°$ (AM и AP лежат на одной прямой), преобразуется посредством функции $z' = z^2$ в тот же луч $A'M'$. В самом деле, если угол $\varphi + 180°$ удвоить, то получится $2\varphi + 360°$; луч, наклонённый к $A'x'$ под этим углом, совпадает с $A'M'$.

Посмотрим, во что преобразуется посредством функции $z' = z^2$ фигура, заштрихованная на черт. 39 слева; она называется полуплоскостью. Полуплоскость можно рассматривать как заполненную бесчисленным множеством лучей, выходящих из A и наклонённых к Ax под углами, бóльшими φ, но меньшими $\varphi + 180°$. Лучи AM и AP составляют границу полуплоскости (одну прямую); мы не будем причислять эти лучи к самой полуплоскости. Функция $z' = z^2$ преобразует лучи, принадлежащие полуплоскости, во всевозможные лучи, выходящие из A' и наклонённые к $A'x'$ под углами, бóльшими 2φ, но меньшими $2\varphi + 360°$.

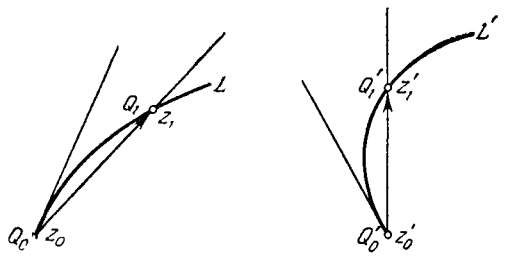
Отсюда следует, что полуплоскость, ограниченная лучами AM и AP, преобразуется в фигуру, ограниченную одним лучом $A'M'$ (черт. 39 справа). Последнюю фигуру можно охарактеризовать как плоскость с выброшенным (или исключённым) лучом $A'M'$. Говоря так, мы хотим подчеркнуть, что эта фигура образована всеми точками плоскости, кроме точек, лежащих на $A'M'$. Если в полуплоскости взять какие-либо два луча AQ и AR, наклонённые к Ax под углами φ_1 и φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$), то они составят между собой угол $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. В результате преобразования $z' = z^2$ эти лучи перейдут в $A'Q'$ и $A'R'$, наклонённые к $A'x'$ под углами $2\varphi_1$ и $2\varphi_2$. Очевидно, что угол $Q'A'R'$ равен $2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\alpha$.

Итак, углы с вершиной в A удваиваются при преобразовании $z' = z^2$, иными словами, конформность отображения нарушается в точке A.

32. Покажем, что углы с вершиной в любой точке $z_0 \neq 0$ не изменяются при преобразовании $z' = z^2$. Отсюда будет следовать, что начало координат является единственной точкой, в которой нарушается конформность при данном преобразовании.

Пусть L — какая-либо кривая, выходящая из точки z_0. Если на L взять точку z_1, отличную от z_0, то направление секущей, соединяющей z_0 и z_1, будет совпадать с направлением вектора Q_0Q_1, изображающего разность $z_1 - z_0$ (черт. 40

слева). Посредством функции $z' = z^2$ кривая L преобразуется в некоторую кривую L', а точки z_0 и z_1 — в новые точки $z'_0 = z_0^2$ и $z'_1 = z_1^2$, лежащие на кривой L'. Очевидно, что направление секущей, соединяющей z'_0 и z'_1, совпадает с направлением вектора $Q'_0Q'_1$, изображающего разность $z'_1 - z'_0$ (черт. 40 справа). Мы сравним между собой направления



Черт. 40.

двух секущих; для этого достаточно сравнить между собой направления векторов $z'_1 - z'_0$ и $z_1 - z_0$. Так как угол между ними, отсчитываемый от вектора $z_1 - z_0$ к вектору $z'_1 - z'_0$, совпадает с аргументом частного $\dfrac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$, то всё сравнение сводится к подсчёту $\operatorname{Arg}\dfrac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$. Частное $\dfrac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$ можно преобразовать, заменив z'_1 и z'_0 их выражениями: $z'_1 = z_1^2$ и $z'_0 = z_0^2$. Получим:

$$\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0} = z_1 + z_0 \text{ и } \operatorname{Arg}\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0} = \operatorname{Arg}(z_1 + z_0).$$

Следовательно, угол между направлениями секущих к кривым L' и L, проведённых через пары соответствующих точек z_0 и z_1 (на L) и $z'_0 = z_0^2$ и $z'_1 = z_1^2$ (на L'), равен $\operatorname{Arg}(z_1 + z_0)$. Переходя от секущих к касательным, будем неограниченно приближать точку z_1 по кривой L к точке z_0.

Тогда и точка $z'_1 = z_1^2$ будет неограниченно приближаться по кривой L' к точке $z'_0 = z_0^2$. Поэтому наши секущие будут также неограниченно приближаться к касательным, проведённым в точках z_0 и z'_0, а угол между секущими — к углу между касательными. Но угол между секущими равен $\operatorname{Arg}(z_0 + z_1)$

и при стремлении z_1 к z_0 стремится к $\operatorname{Arg}(2z_0)$; последний же совпадает с $\operatorname{Arg} z_0$. Итак, угол между касательными к кривым L' и L, проведённым в соответствующих точках $z'_0 = z_0^2$ и z_0, равен $\operatorname{Arg} z_0$. Если, например, $z_0 = 2$, то $\operatorname{Arg} z_0 = 0$; отсюда следует, что направление касательной в точке $z_0 = 2$ к любой кривой L, проведённой через эту точку, будет совпадать с направлением касательной в точке $z'_0 = z_0^2 = 4$ к кривой L', в которую функция $z' = z^2$ преобразует L. Если $z_0 = i$, то $\operatorname{Arg} z_0 = 90°$; следовательно, касательная в точке $z_0 = i$ к любой кривой L, проведённой через эту точку, и касательная в точке $z_0^2 = i^2 = -1$ к образу кривой L' взаимно перпендикулярны.

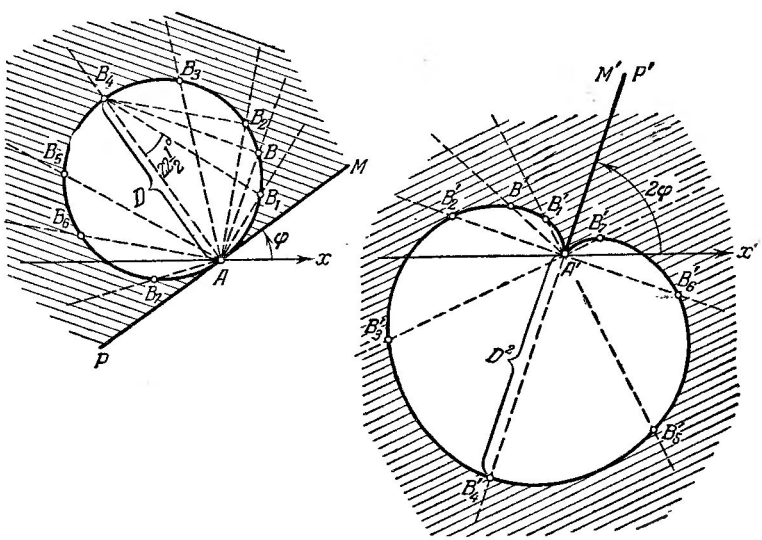
Возвращаясь к общему случаю, можно сказать, что касательные поворачиваются на угол, равный $\operatorname{Arg} z_0$, когда кривые, проходящие через точку z_0, преобразуются посредством функции $z' = z^2$.

Теперь легко понять, почему углы с вершиной в $z_0 (z_0 \neq 0)$ остаются неизменными при этом преобразовании. Если через точку z_0 проходят две кривые L_1 и L_2, образующие угол α в этой точке, то это означает, что касательные к кривым в этой точке образуют между собой угол α. После преобразования точка z_0 перейдёт в точку $z'_0 = z_0^2$, а кривые L_1 и L_2 — в кривые L'_1 и L'_2. Направления касательных в точке z_0 к новым кривым получатся из прежних направлений касательных путём поворота на один и тот же угол, равный $\operatorname{Arg} z_0$. Очевидно, что угол между новыми касательными сохранит прежнюю величину α. А это и значит, что угол между кривыми с вершиной в любой точке $z_0 \neq 0$ не изменяется при преобразовании $z' = z^2$.

Заметим, что способ, которым мы доказали конформность отображения $z' = z^2$, применим и к другим функциям, например к дробно-линейной $z' = \dfrac{z-a}{z-b}$ или функции Жуковского $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Только здесь получатся другие выражения для угла поворота касательной. Так, для дробно-линейной функции получится, что касательные к кривым, проходящим через точку z_0, поворачиваются на угол, равный $\operatorname{Arg} \dfrac{a-b}{(z_0-b)^2}$, а в случае функции Жуковского — на угол, равный $\operatorname{Arg}\left(1 - \dfrac{1}{z_0^2}\right)$. В первом случае нужно дополнительно пред-

положить, что $z_0 \neq b$ (в этой точке выражение $\frac{z-a}{z-b}$ не имеет смысла); во втором случае, — что $z_0 \neq 0$ (по аналогичной причине) и, кроме того, что $z_0 \neq \pm 1$ (в этих точках $1 - \frac{1}{z_0^2}$ обращается в нуль и, следовательно, $\operatorname{Arg}\left(1 - \frac{1}{z_0^2}\right)$ теряет смысл). Можно было бы проверить, что в случае функции Жуковского конформность нарушается в точках -1 и $+1$: углы с вершинами в этих точках увеличиваются вдвое в результате преобразования.

33. Рассмотрим, во что преобразуется посредством функции $z' = z^2$ окружность, проходящая через точку A. Пусть касательная к окружности в этой точке образует с Ax угол φ (черт. 41). Очевидно, что окружность лежит в полуплоскости,



Черт. 41.

ограниченной этой касательной. Функция $z' = z^2$ преобразует полуплоскость в плоскость с выброшенным лучом $A'M'$. Чтобы найти образ окружности, проведём из A в полуплоскости всевозможные лучи и отметим на каждом из них точку пересечения с окружностью. На нашем чертеже для определённости изображены семь лучей; все углы MAB_1

B_1AB_2, B_2AB_3, ..., B_7AP взяты равными между собой $\left(\text{по } 22\frac{1}{2}^\circ\right)$. Функция $z' = z^2$ преобразует их в лучи, составляющие между собой вдвое бóльшие углы; каждый из углов $M'A'B_1'$, $B_1'A'B_2'$, $B_2'A'B_3'$, ..., $B_7'A'P'$ равен 45°.

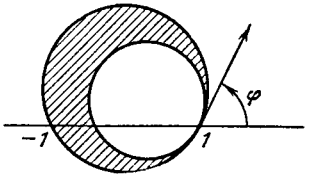
Подсчитаем, куда перейдут точки B_1, B_2, B_3, ..., B_7. Расстояния их образов B_1', B_2', B_3', ..., B_7' от точки A' будут равны квадратам расстояний AB_1, AB_2, AB_3, ..., AB_7. Но из черт. 41 видно, что $AB_7 = AB_1 = AB_4 \sin 22\frac{1}{2}^\circ = D \sin 22\frac{1}{2}^\circ$ (D — диаметр окружности); далее $AB_6 = AB_2 = D \sin 45^\circ$, $AB_5 = AB_3 = D \sin 67\frac{1}{2}^\circ$, $AB_4 = D$. Остаётся заметить, что

$$\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2-1{,}4142\ldots}{4} = 0{,}1464\ldots,$$

$\sin^2 45^\circ = 0{,}5000\ldots$, $\sin^2 67\frac{1}{2}^\circ = \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ = 1 - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = 0{,}8535\ldots$ Следовательно, $A'B_7' = A'B_1' = 0{,}1464D^2$, $A'B_6' = A'B_2' = 0{,}5000D^2$, $A'B_5' = A'B_3' = 0{,}8535D^2$, $A'B_4' = D^2$. Через точки A', B_1', B_2', B_3', ..., B_7' проходит кривая, являющаяся образом окружности при преобразовании $z' = z^2$. Чтобы получить о ней более точное представление, можно было бы брать бóльшее количество лучей. Кривая эта называется *кардиоидой* (слово кардиоида означает сердцеобразная). Легко понять, что фигура, заштрихованная на черт. 41 слева (она получается из полуплоскости путём выбрасывания круга), преобразуется посредством функции $z' = z^2$ в фигуру, заштрихованную на том же чертеже справа. Последняя ограничена кардиоидой и лучом $A'M'$, составляющим угол 2φ с положительным направлением действительной оси. Можно показать, что луч $A'M'$ направлен по касательной к каждой из двух дуг кардиоиды, выходящих из точки A. В самом деле, проведём на черт. 41 слева какой-либо луч AB, и пусть B обозначает точку его пересечения с окружностью; если угол $MAB = \alpha$, то $AB = D \sin \alpha$. Посредством функции $z' = z^2$ этот луч преобразуется в луч $A'B'$ (черт. 41 справа), причём точка B' — образ точки B — попадёт на кардиоиду. На основании известных нам свойств преобразования $z' = z^2$ имеем: $\widehat{M'A'B'} = 2\alpha$ и $A'B' = AB^2 = D^2 \sin^2 \alpha$. Будем считать угол α переменным и заставим его неограниченно приближаться к нулю. Тогда угол 2α между $A'B'$ и $A'M'$ будет также неограниченно приближаться к нулю, а сам луч $A'B'$,

являющийся секущей для кардиоиды, будет поворачиваться около точки A', неограниченно приближаясь к предельному положению $A'M'$. При этом точка B' — ближайшая к A' точка пересечения секущей с кривой — будет неограниченно приближаться к A', так как расстояние $A'B' = D^2 \sin^2 \alpha$ стремится к нулю, когда α стремится к нулю. Отсюда вытекает, что $A'M'$ — предельное положение секущей — является касательной к дуге $A'B_1'B_2'\ldots$ в точке A'. Так же можно убедиться, что $A'M'$ является касательной и к дуге $A'B_7'B_6'\ldots$ в той же точке A'.

34. Обратимся, наконец, к функции Жуковского $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ и применим её к преобразованию фигуры, ограниченной двумя окружностями: одной, проходящей через точки -1 и $+1$, и другой, касающейся первой изнутри в точке 1; на черт. 42 эта фигура заштрихована.



Черт. 42.

Убедимся сначала, что преобразование $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ можно свести к нескольким выполняемым друг за другом более простым преобразованиям уже знакомого нам вида. С этой целью рассмотрим отношение $\frac{z'-1}{z'+1}$. Заменяя в нем z' выражением $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, найдем:

$$\frac{z'-1}{z'+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1} = \frac{z^2+1-2z}{z^2+1+2z} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

Итак, из того, что $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, вытекает, что $\frac{z'-1}{z'+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. Справедливо и обратное: из второго следует первое. В самом деле, из второго получаем:

$$z' - 1 = z'\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

откуда

$$z'\left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right] = 1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

и далее:

$$z'=\frac{1+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}=\frac{(z+1)^2+(z-1)^2}{(z+1)^2-(z-1)^2}=\frac{2z^2+2}{4z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Итак, соотношения $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ и $\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ эквивалентны (одно следует из другого).

Поэтому преобразование Жуковского $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ можно представить в виде $\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. Результат должен получиться тот же самый. Но теперь видно, что переход от z к z' можно осуществить в три этапа. Сначала перейти от z к вспомогательному переменному z_1 по формуле

$$z_1=\frac{z-1}{z+1}, \tag{1}$$

затем от z_1 перейти к z_2 по формуле

$$z_2=z_1^2, \tag{2}$$

наконец, от z_2 перейти к z' по формуле

$$\frac{z'-1}{z'+1}=z_2. \tag{3}$$

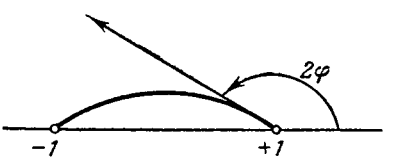
Читатель легко убедится, что если выражение z_1 из формулы (1) подставить в (2), а затем полученное выражение z_2 подставить в (3), то тогда и получится нужное нам преобразование $\frac{z'-1}{z'+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$.

Какой же смысл в замене одного преобразования Жуковского тремя преобразованиями (1), (2) и (3), выполняемыми друг за другом? Смысл в том, что каждое из них проще, чем преобразование Жуковского и уже знакомо нам.

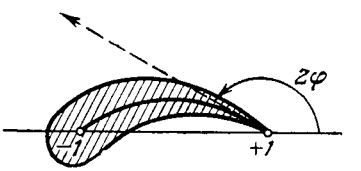
Итак, применим к фигуре, изображённой на черт. 42, преобразование (1), к тому, что получится,—преобразование (2) и, наконец, к тому, что получится после этого, применим ещё одно преобразование (3).

Вспомним, что в п. 30 мы уже нашли, что фигура, изображённая на черт. 38 слева (а она совпадает с фигурой черт. 42), преобразуется посредством функции $z_1'=\frac{z-1}{z+1}$ (т. е. функции (1)) в фигуру, представленную на черт. 38 справа.

Последняя ограничена прямой, проходящей через точку O и составляющей угол φ с положительным направлением действительной оси, и окружностью, касающейся этой прямой в точке O. Можно охарактеризовать эту фигуру как полуплоскость с выброшенным из неё кругом. Преобразуем, далее, эту фигуру посредством функции $z_2 = z_1^2$ (2). Одного взгляда на черт. 41 достаточно, чтобы видеть, что и эта задача уже решена нами в п. 33. В конце упомянутого пункта мы отметили, что здесь должна получиться фигура, изображённая на черт. 41 справа; она ограничена лучом и кардиоидой. Остаётся, следовательно, применить к последней фигуре преобразование $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$ (3). Здесь z' можно рассматривать как независимое переменное, а z_2 как функцию. Из того, что говорилось в п. 28, следует, что когда z_2 описывает луч $A'M'$, выходящий из начала и наклонённый к положительной части действительной оси под углом 2φ, соответствующая точка z' описывает дугу окружности, соединяющую точки $+1$ и -1; касательная в точке $+1$ к этой дуге составляет с направлением от точки -1 к $+1$, т. е. с положительным направлением действительной оси, также угол 2φ (черт. 43).



Черт. 43.

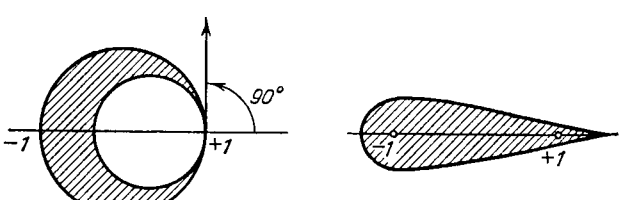


Черт. 44.

Мы нашли, следовательно, образ луча $A'M'$ при преобразовании $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$. Чтобы найти образ кардиоиды, можно было бы проследить за тем, куда перейдут её точки, например точки B_1', B_2', ..., B_7'. Мы не будем, однако, производить громоздких вычислений, а удовлетворимся тем, что изобразим преобразованную кривую в её окончательном виде на черт. 44.

Ограниченная ею фигура имеет вид профиля (т. е. поперечного разреза) крыла самолёта. Такого рода профили были предложены впервые русскими учёными С. А. Чаплыгиным и Н. Е. Жуковским, почему они и называются *профилями Жуковского — Чаплыгина*. Меняя угол φ наклона касатель-

ной к окружности в точке *1* (черт. 42) и радиус меньшей окружности, можно получать различные профили. В частности, если угол φ — прямой, т. е. большая окружность построена на отрезке от -1 до $+1$, как на диаметре, то соответствующий профиль симметричен относительно действи-



Черт. 45.

тельной оси (черт. 45). Такой профиль называется иногда *рулём Жуковского.*

Профили Жуковского — Чаплыгина являются основными профилями во всех исследованиях по теории крыла самолёта.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если два комплексных числа $c_1 = a_1 + ib_1$ и $c_2 = a_2 + ib_2$ равны, то их действительные и мнимые части порознь также равны: $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Указание. Исходить из того, что равные комплексные числа изображаются векторами, равными по длине, параллельными и направленными в одну и ту же сторону.

2. Пользуясь переместительными, сочетательными и распределительным законами сложения и умножения, выполнить следующие действия над комплексными числами:

а) $(3-7i)+(-2+i)+(-1+5i)$;

б) $(3-7i)(3+7i)$; в) $(1+i)(1+i\sqrt{3})$;

г) $(1+i)^2:(1-i)^2$; д) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

Ответы: а) $-i$; б) 58; в) $1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$; г) -1; д) -1.

3. Доказать, что любое комплексное число $c = a+bi \neq 0$, абсолютная величина которого равна r, а аргумент равен α,

можно представить в виде:

$$c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

(*тригонометрическая форма комплексного числа*).

Указание. Выразить a и b через r и α с помощью чертежа, на котором $c = a + bi$ представлено в виде вектора.

4. Доказать, что если

$$c_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \text{ и } c_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2),$$

то

$$c_1c_2 = r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)].$$

Указание. Воспользоваться геометрической формулировкой правила умножения комплексных чисел или же перемножить c_1 и c_2, пользуясь законами сложения и умножения, и затем применить формулы для косинуса и синуса суммы.

5. Опираясь на результат предыдущей задачи, доказать, что если

$$c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

(r — абсолютная величина c, а α — аргумент c), то

$$c^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

(n — натуральное число). Вывести отсюда, что

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

(*формула Муавра*).

6. Используя формулу Муавра (см. задачу 5), вычислить:

а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{217}$.

Указание. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° + i\sin 45°$; $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos 30° + i\sin 30°$.

Ответы: а) -1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

7. Исходя из формулы Муавра (см. задачу 5), вывести формулы для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ при $n = 2$, 3 и 4.

Указание. В формуле Муавра $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ нужно возвысить $\cos\alpha + i\sin\alpha$ в степень n путём

непосредственного умножения (например, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha$), а затем записать, что действительные и мнимые части справа и слева от знака равенства в формуле Муавра равны между собой.

Ответы: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$; $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$; $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$; $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

8. Во что перейдёт треугольник с вершинами в точках: 0, $1-i$, $1+i$ в результате преобразования:

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z.$$

Каков геометрический смысл этого преобразования?

Указание. Начать с выяснения геометрического смысла. Но можно начинать и с вычисления вершин преобразованного треугольника.

9. Во что перейдёт полукруг, расположенный выше действительной оси и опирающийся, как на диаметр, на отрезок с концами -1 и $+1$, в результате преобразования: $z' = \frac{z-1}{z+1}$?

Ответ. В прямой угол, ограниченный верхней частью мнимой оси и отрицательной частью действительной оси.

10. Во что перейдёт угол α с вершиной в начале координат в результате преобразования $z' = z^3$?

Ответ. В угол раствора 3α и с вершиной в начале координат.